Švietimo Ministerijos
Knygų Leidimo Komisijos leidinys

A. Jakštas

Trys garsiausieji matematikos klausimai



KAUNAS 1924

Pirmajam Lietuvos matematikui

Vysk. Antanui Baranauskui

paminėti, sukakus užpernai nuo jo mirties 20 metų, šį veikalą skiria

Autorius.



Skaitytojams žodis.

Autoriaus tikslas — supažindinti Lietuvos skaitančiąją publiką su trimis garsiausiais matematikos klausimais: *ratilo*[1]) *kvadratūra, dvigubo kūbo sudarymu* ir *kampo trisekcija.* Jie pareina nuo šių lyginių

$$x^2 = \pi r^2$$

$$x^3 = 2 a^3$$

$$x^3 = \frac{3}{4} x - \frac{m}{4}$$

Pirmame x reiškia ieškomojo kvadrato šoną (kraštinę), antrame — ieškomojo kūbo briauną, trečiame — dalomojo kampo α trečdalio siną $\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)$, o m — kampo α siną ($\sin\alpha$).

Pirmasis lyginys, kaipo kvadratinis, duotųs lengvai nubrėžti, jei π dydis būtų racionalis. Bet jis, kaip žemiau pamatysime, yra ne vien iracionalis, bet ir transcendentis, todel, kaipo toksai, negalima ne tik elementariu geometrišku brėžimu, pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės, surasti, bet ir jokiomis algebriškomis kreivomis nubrėžti.

Antruoju du lyginiu irgi *elementariai* nenubrėžiamu, bet galima nubrėžti įvairiomis algebriškomis kreivomis.

Ratilo kvadratūrai paskyrėme daugiausia vietos, nes šis uždavinys ir savo pagarsėjimu ir svarba toli pralenkia kitu du.

Su antruoju uždaviniu apsidirbom trumpai, neįsileisdami į nereikalingas smulkmenas.

Trečiajam — kampo trisekcijai — pašventėm bent kiek daugiau vietos, nes laikėm savo pareiga mate-

---

[1]) Žiūr. *Miežinio* žodyną: *ratilu suktis* — kružitsia, *ratilas* — okružnost. Tik Miežinis rašo *ratylas.* Bet gyvoj kalboj to ilgojo y mums čia neteko girdėti.

matiškai sukritikuoti keletą rusiškų veikalų, teikiančių *elementarių* kampo trisekcijos nubrėžimų ir tikinančių, kad tie nubrėžimai esą *griežti*. Norėdami apsaugoti lietuvius skaitytojus nuo panašių klaidų, mes ir įdėjom savo straipsnin įrodymų, kad visi tie „elementariai" nubrėžimai yra vien *apytikriai*, o ne griežti, kaip tvirtina jų autoriai.

Labai mums gaila, kad straipsny „Ratilo kvadratūra Lietuvoje" negalėjom paduoti daugiau žinių. Bet tai jau ne nuo mūsų parėjo.

Laikysime savo tikslą atsiektu, jei šis veikalėlis įstengs mūsų moksleivijoj ir šiaipjau inteligentijoj sužadinti didesnio matematikos klausimais susidomėjimo.

Mums šią studiją barašant daugiausia yra padėję šie veikalai:

Montucla. Histoire des recherches sur la Quadrature du Cercle, avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Nouvelle éd. Paris, Bachelier 1831.

F. Rudio. Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über Kreismessung. Leipzig, 1892 (mes naudojomės rusišku vertimu).

E. Beutel. Die Quadratur des Kreises. Leipzig, Teubner 1913.

S. Günther. Geschichte der Mathematik. I. Teil. Leipzig, 1908.

Prof. Ambros Sturm. Das Delische Problem. Linz, 1895, 2 Teile.

Dr. Mitscherling. Das Problem der Kreisteilung, Leipzig, 1913.

KAUNAS, 22—III—22.

I. Ratilo kvadratūra.

I. Ratilo kvadratūra.

Įžanga.

Priežastys, del kurių šis klausimas taip yr pagarsėjęs.

Matematikoj netrūksta garsių uždavinių, bet nei vienas nėra tiek įgijęs garso, kaip ratilo kvadratūros klausimas, nei vienas nėra tiek pritraukęs tyrinėtojų ir nei vienas, galime pridurti, nėra tiek pagaminęs nevykusių gvaldymų, kaip jis.

Gal del to bandymas surasti ratilo kvadratūra tapo visų sunkiausio, neįvykdomo ir todel nepasiekiamo sumanymo sinonimu. Pačioje gi matematikoje tai yra visų seniausis uždavinys: jo istorija apima 4000 metų, t. y. beveik tiek laiko, kaip ir pati žmonijos kultūros istorija.

Yra įvairių priežasčių, padėjusių ratilo kvadratūrai pagarsėti. Jų skaičiun neįeina jos svarba mokslui bei jo pritaikymams. Matematikoj esama kur kas įdomesnių ir gyvenimo praktikai svarbesnių uždavinių, kurių tyrimas tęsės irgi ilgą laiką; tačiau jie, be siauro matematikų būrelio, platesnei publikai yr likę nežinomi. Tuo tarpu ratilo kvadratūros klausimas iki pastarųjų laikų visada rasdavo daugybę tyrinėtojų. O kadangi šiems dažnai trūkdavo specialio matematikos išsilavinimo, tatai ir nenuostabu, kad jiems šis uždavinys tinkamai išspręsti nepavykdavo vien jau del to, kad jo išsprendimas tąja prasme, kaip apie jį šiaipjau žmonės mano, kaip žemiau pamatysime, yra negalimas.

Pirmoji priežastis, traukianti daug ką šin uždavinin, yra ta, kad ratilo ir kvadrato sąvokos yra kiekvienam žinomos; kiekvienas tariasi suprantąs, kas yr apribotos figūros plotas, ir del to uždavinys — *paversti ratilą lygiadydžiu kvadratu* — pirmu akimoju atrodo esąs nepersunkus. Antra — faktas, kad tas uždavinys nepavyko išgvaldyti net žymiausiems matematikams, traukė prie jo ne vien tikrus matematikus, bet ir didelį nematematikų būrį.

Be to, ratilo kvadratūros gvaldymu užsiimti ragino ir nemirioji garbė, turėjusioji tekti laimingam to uždavinio išsprendėjui. O viduriniais amžiais buvo čion prislplakęs net ir prietaras, kad žmogus, išgvaldęs ratilo kvadratūros klausimą, įgysiąs gilesnį gamtos reiškinių supratimą; dėliai to ratilo kvadratūros uždavinys buvo laikomas lygiai svarbiu, kaip ir kiti garsiausieji anų laikų uždaviniai, būtent — filosofiškojo akmens, gyvybės eleksiro ir perpetuum mobile.

Galop miniose iki pastarųjų laikų laikėsi įsitikinimas, žymiausios Mokslų Akademijos esą paskyrusios didelius pinigus tam, kas ratilo kvadratūros klausimą laimingai išspręsiąs. Taigi be garbės dar ir noras pralobti buvo akstinas, pagimdęs nesuskaitomą mažamokslių „kvadratorių" daugybę. Jie tai užversdavo Mokslų Akademijas savo ratilo kvadratūros gvaldymais; šioms nepripažinus tų gvaldymų tikrais ir atmetus, daugelis „kvadratorių" įtardavo Akademijas pavydu ir pasilikdavo įsitikinę, ateity jų nuopelnai būsią visų pripažinti. Kiti taip būdavo įsitikinę savo išgvaldymo teisingumu, kad net viešai skelbdavo, išmokėsią po 1000 dolerių tam, kas jų protavimuose bei apskaitymuose surasiąs klaidą (k. š. prancūzas Mathulon'as ir k.). Nedingo

„kvadratoriai“ net ir pastarais laikais. Prof. E. Beutel'is savo veikalėly „Die Quadratur des Kreises“ mini porą „kvadratorių“ iš praeito amžiaus, išleidusių savo veikalus garsiais pavadinimais 1840 ir 1893 metais. Tasai pats matematikas sakosi net ir prieš pat karą gavęs iš Pietų Amerikos naują ratilo kvadratūros išgvaldymą, pasirodžiusį taip pat netikru, kaip ir kiti augščiau minėtieji.

Taigi ir nenuostabu, kad Paryžiaus Mokslų Akademija jau 1775 m. yr nusistačius „naujų ratilo kvadratūros gvaldymų daugiau nebepriimti“. Tą pat yra padarę ir kitos Mokslų Akademijos; tačiau tie nutarimai kad ir žymiai sumažino „kvadratorių“ skaičių, bet visai jų panaikinti neįstengė.

Dėliai to mes tariamės, būsią ne pro šalį trumpai čia supažindinus ir lietuvius skaitytojus, ypač mūsų moksleiviją, su tuo taip senu ir taip plačiai pasauly pagarsėjusiu klausimu.

Griežtas to klausimo apibrėžimas ir jo istorijos laikotarpiai.

Tesie duotojo ratilo ratlankis (apskritimas) l, jo skersmuo d ar $2r$; tuomet santykis l:d žymima graikų raide π[1]). Kadangi visi ratilai yra panašios figūros, tatai visuose juose ratlankio santykis su skersmeniu bus vienas ir tas pas π. Iš čia gausime lygybę:

$$\frac{l}{d} = \frac{l}{2r} = \pi, \text{ iš kur } l = \pi d = 2\pi r \qquad (1)$$

---

[1]) Tą žymėjimą pirmutinis yr pasiūlęs anglas *W. Jones*, labiausiai gi jį išplatinęs — *Euleris*.

Tesie nūn stipinu (spinduliu) S nubrėžtojo ratilo plotas = P, o turinčio šoną (kraštinę) x kvadrato plotas $= p$. Tuomet, remdamies elementarės geometrijos įrodymais, turėsime reiškinius:

ratilo plotui $P = \pi r^2$ ...... (2)

kvadrato plotui $p = x^2$ ...... (3)

Ratilo kvadratūrai išgvaldyti reikia, kad tuodu plotu būtų lygiu, t. y. P = p. Turėdami tą lygybę iš (2) ir (3) lyginių gauname naują

$$x^2 = \pi r^2 \ldots \quad (4)$$

iš kur prie $r = 1$ randame:

$$x = \sqrt{\pi} = \sqrt{3{,}141\,592 \ldots} = 1{,}7724 \ldots\ldots \quad (4)'$$

Vadinas, ratilo kvadratūros klausimas *apskaitymu* visada galima išspręsti norimu griežtumu.

Bet paprastai ratilo kvadratūros vardu suprantama ne lygiadydžio ratilui kvadrato šono (kraštinės) *apskaitymas,* tik *geometriškas to šono nubrėžimas* ir tai *vien skriestuvu* ir *liniuote.* Šis uždavinys pareina nuo elementario nubrėžimo tiesiosios, lygios π. Ir iš tikrųjų iš (4) lyginio gauname proporciją:

$$2\,\pi\,r : x = x : \frac{r}{2} \ldots\ldots \quad (5)$$

iš kurios matome, kad ieškomojo kvadrato šonas yra vidurinė proporcinė tarp ratilo ratlankio ir jo pusstipinio, arba prie $r = 1$, tarp $2\,\pi$ ir $1/_2$. Bet ar ji galima geometriškai *elementariu būdu* nubrėžti?

Kad skaitytojai mūsų atsaką į šį klausimą geriau suprastų, turime čia paaiškinti, ką mes vadiname *elementariu geometrišku nubrėžimu.*

Daugelis brėžiamųjų planimetrijos uždavinių (pav., paversti daugiakampis lygiadydžiu trikampiu bei kvadratu) gali būti išgvaldyta pasigaunant vien šių dviejų uždavinių:

1. per du duotuoju punktu nutiesti tiesioji linija,
2. iš duotojo punkto duotuoju stipinu nubrėžti ratilas.

Ir iš tikrųjų, atsimindami, pav., kaip duotasai daugiakampis perkeičiamas į lygiadydį trikampį, mes matom, kad tai daroma pasigaunant lengvesnių uždavinių, kurie tariama, jau esą pirmiau išgvaldyti (kaip šit, pav., paralėlės (lygiagretės) duotajai tiesiajai per duotąjį punktą brėžimas ir k.). Šie uždaviniai savo ruožtu gvaldomi pasigaunant dar lengvesnių ir tt., kol galop prieinama augščiau minėtuoju du elementariu uždaviniu, kuriais, pakartojus reikiamąjį sykių skaičių, ir sudaroma visi brėžiniai, vedą į pirmykščio uždavinio išgvaldymą. Tuodu gi elementariu uždaviniu jau nebegalima išgvaldyti pasigaunant dar prastesnių, ir todel juodu planimetrijoje laikoma išgvaldytais — pirmasis *liniuote*, antrasis — *skriestuvu*.

Taigi žodį *nubrėžti* mes ir vartosime prasme *„nubrėžti, pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės"*. Tuo būdu ratilo kvadratūros klausimas pareina galutinai nuo šio: *ar galima ratilas paversti lygiadydžiu kvadratu pasigaunant vien nurodytų dviejų elementarių uždavinių*, t. y. *pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės?* Jei tuo elementariu būdu būtų galima nubrėžti tiesioji lygi π, 2π ar apskritai $m\pi$, kur m reiškia bet kokį neskaidytą skaičių, tai ratilo kvadratūros klausimas būtų išgvaldytas.

Prie šių geometriškų paaiškinimų turime pridurti dar ir keletą aritmetiškų pastabų, kad geriau galėtumėm skaičiaus π esmę suprasti.

Visi skaičiai dalinami *racionaliais* ir *iracionaliais*. Racionalių skaičių sritis apima visus teigiamuosius,

neigiamuosius ir skaidytuosius skaičius bei skaidinius (trupmenas). Iracionalių skaičių srity atskiriama *algebriniai* ir *transcendenčiai* skaičiai. Pirmieji yra bet kokio laipsnio racionaliais koeficientais lyginių šaknys. Racionaliai skaičiai gaunama vienkarčiu ar pakartotu dėstymu, imstymu, dauginimu ir dalymu teigiamųjų bei neigiamųjų, neskaidytųjų ir skaidytųjų skaičių. Priėmus tam tikrą linijos atrėžą (atkarpą) vienetu, galima skriestuvu ir liniuote visi keturi veiksmai geometriškai išvesti. Paprasčiausi iracionaliai skaičiai gaunama traukiant kvadratinę šaknį. Kiekvienas reiškinys tipo $a + b\sqrt{c}$ geometriškai yra nubrėžiamas. Iracionaliai skaičiai, gaunami traukiant augštesnių laipsnių šaknis, yra tik tuomet tenubrėžiami, kai uždaviniui išspręsti užtenka traukti kvadratinė šaknis *galuotą sykių skaičių*. Mes čia tyčia pabrėžiame *galuoto* skaičiaus sąlygą, nes *prie begalinio ar tai racionalių veiksmų ar kvadratinių šaknų traukimų skaičiaus*, apskritai kalbant, susiduriama su dydžiu geometriškai nenubrėžiamu.

Tuo remdamies, mes galim čia apskritai pasakyt, jog kiekvienas analitiškas reiškinys, t. y. kiekvienas iš raidžių ar iš skaitmenų tam tikromis apskaitymo taisyklėmis sudarytasai sujungimas bei formula tik tuomet tegalima skriestuvu ir liniuote nubrėžti, kai *tas reiškinys bei formula yra sudaryta iš duotųjų dydžių, sujungtų galuotu veiksmų bei kvadratinės šaknies traukimų skaičium.*

Po šių bendrų pastabų peržiūrėkim nūn ratilo kvadratūros istoriją amžių bėgyje. Toje istorijoje atskiriama trys laikotarpiai:

I. Elementaris-geometriškasai nuo 1700 pr. Kr. iki 1654 po Kr., kada išrasta diferencialis ir integralis skaičiavimo metodas. Ratlankio dydis stengtasi prieiti apskaitant tobūlųjų daugiakampių perimetrus, imant tuose daugiakampiuose kaskart didesnį šonų skaičių. Tuo keliu aritmetiškas π dydis apskaityta užtektinu griežtumu, o draug surasta ir ne vienas apytikris geometriškas jo nubrėžimas gana dideliu, praktikai visai ganėtinu griežtumu.

II. Augštosios analizės laikotarpis (1654—1766), kuriame susekta π skaičiaus sąryšiai su kitomis funkcijomis ir gauta π skaičiui analitiški reiškiniai, sudaromi nesibaigiamu veiksmų skaičium, t. y. tam tikros nesibaigiamosios eilės, nesibaigiamieji padaugai bei nesibaigiamai tęsiamieji skaidiniai (trupmenos).

III. Algebriškasis laikotarpis (1766—1882), kuriame pažinta tikroji π skaičiaus esmė, ir šis uždavinys 1882 m. Miuncheno prof. *Lindemann'o* buvo galutinai išspręstas, griežtai įrodžius, kad π skaičius yra transcendentis ir kad todel ratilo kvadratūra, pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės, yra negalima.

Elementaris geometriškasis laikotarpis.

Žiloj senovėj, ratilo kvadratūros uždaviniui išspręsti, stengtasi sužinoti matavimu ratlankio ilgis. Istorija liudija, jog tuo keliu *babyloniečiai* buvo jau susekę, kad ratilo stipinas, klostomas ratlankyje, telpa lygiai šešis kartus, sudarydamas tobūlą (taisyklingą) šešiakampį. Šis rezultatas yr davęs progos babyloniečiams manyti, kad viso ratlankio ilgis esąs šešis kartus didesnis negu diametro bei skersmens.

Iš babyloniečių tą apytikrį ratlankio dydį yr pasisavinę ir *senovės žydai*, kaip tai matyt iš pat Biblijos. Ten III Kar. 7. 23 ir II Kron. 4. 2 Saliamono bažnyčios aprašyme yra minima didžiulis apskritas indas, vadinamas „vario jūra“, apie kurią pasakyta šiais žodžiais: „Jis (Saliamonas) nuliedino taipogi jūrą, turėjusią 10 mastų nuo vieno krašto iki kitam, aplinkui apskritą ir 30 mastų juostele apriestą aplinkui“. Matuojant tos juostelės ilgį, be abejo gauta ne 30, tik 32 nepilnu mastu; bet matavimo rezultatu imta, matyt, apskritas skaičius 30, sudarytas iš 3×10, likusioji dalelė 2 atmesta, kaipo matavimo rezultatui dėliai savo mažumo neturinti reikšmės.

Ir Biblijos tas apytikris skaičius $\pi = 3$ yr perėjęs ir vėlesnin Talmudan, nes ten vienoj vietoj randas šitoks tvirtinimas: „Kas savo apskritume turi 3 delno pločius, tas platumo tetur tik vieną delno plotį“. Praktikoj ši pirmutinė apytikrė vertė $\pi = 3$ dar ir šiandien dažnai yra užtenkama.

Žydų kaimynai *egiptiečiai*, gvildendami ratilo kvadratūros klausimą, daug anksčiau yr priėję naują, kur kas griežtesnę π vertę. Garsiame „Rindo papyruse“, siekiančiame 2000—1700 metų prieš Kr. g., yra pasakyta be jokių įrodymų, kad ratilo plotas yra lygus plotui kvadrato, kurio šonas yra lygus ratilo skersmeniui be $\frac{1}{9}$ jo ilgio dalies. Vadinas, jei ratilo skersmuo yr $2r$, tai kvadrato šonas bus $2r - \frac{2r}{9} = \frac{16r}{9}$. Kadangi to kvadrato plotas yra $\left(\frac{16r}{9}\right)^2$, o ratilo plotas πr^2, tatai iš lygybės $\pi r^2 = \left(\frac{16r}{9}\right)^2$, prie $r = 1$ rasime:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3{,}1604\ldots \qquad (6)$$

Kaip egiptiečiai yr priėję tą žymiai apytikrį dydį, nėra žinios. Prof. Beutelis spėja, jį esant gautą imant apibrėžtojo ir įbrėžtojo kvadrato šonų pusę. Nes jei pirmojo šonas bus $= 1$, tai antrojo bus $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\ldots$ taigi beveik $\frac{7}{9}$; todel $1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$.

Pas *kyniečius* seniausiame jų veikale „Šventojoj skaičiavimo knygoj", kurios pradžia siekia 1100 m pr. Kr., o pabaiga 213 m. po Kr., randame π vertę tą pačią, ką pas žydus ir babyloniečius, t. y. $\pi = 3$. Bet gyvenusio III a. po Kr. kyniečių matematiko *Lui-Hui* raštuose paduodama jau tikresnės vertės: $\pi = \frac{22}{7}$ ir $\frac{157}{50} = 3{,}14$.

Seniausiuose *indų* tikybiniuose raštuose, k. š. *sulbašutrose* ir kunigų vadovėly *Bandhayana* netrūksta bandymų ratilo kvadratūrą išgvaldyti, bet gautieji rezultatai:

$$\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3{,}0625\ldots;$$

$$\pi = 18\,(3 - 2\sqrt{2}) = 3{,}0883\ldots; \quad \pi = 3\frac{1}{125} \qquad (7)$$

toli gražu nepasižymi savo griežtumu.

Tikrai moksliškas ratilo kvadratūros klausimo gvildenimas teprasideda pas senovės *graikus*. Jį tyrinėjo *Anaksagoras* Klazomenietis, *Hippyas* Elidietis, *Euklidas, Eratostenas, Apolonijus* Pergietis ir k. Net ir iš pačių sofistų kai kurie, k. š. *Antifonas* ir *Brizonas,* yra išreiškę tuo klausimu pažymėtinų minčių. Antifonas, pav., taip yra protavęs: įbrėždami ratilan kvadratą, tobūlą 8-kampį, 16-kampį ir t. t. kol bus išsemtas visas ratilas, mes prieisime galop daugiakampį, kuris del savo šonų mažumo susilies su ratlankiu. O kadangi yra galima

sudaryti kvadratas lygiadydis daugiakampiui, tai yra galima ir sudaryti kvadratas lygiadydis duotajam ratilui. Tiesa, Antifono čia užmiršta, jog tuo keliu tegalima vien apytikris ratilo kvadratūros nubrėžimas, bet negalima nepripažinti jam nuopelno, kad jis pirmutinis yr nurodęs visai teisingą kelią ir bandęs surasti kreivalinės figūros plotą, išsemdamas ją daugiakampiais kaskart didėjančiu šonų skaičium.

Brizonas yra da toliau pažengęs. Jis prie įbrėžtųjų daugiakampių, prikergdamas apibrėžtuosius, yr įvedęs matematikon viršutinės ir žemutinės ribos sąvokas.

Šia idėja pasinaudojo *Archimedas* (287—212 pr. Kr.) ir, apskaitęs įbrėžtojo ir apibrėžtojo 96-kampio perimetrus, priėjo svarbų rezultatą:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \qquad (8)$$

Archimedo verte $\pi = 3^1/_7 = 3{,}1428\ldots$ veikiai pasklydo po platųjį pasaulį.

Tęsdamas Archimedo tyrinėjimus toliau, *Apolonijus Pergietis* (apie 200 po Kr.) yr radęs π dydžiui daug griežtesnę vertę:

$$\pi = 3\frac{177}{1250} = 3{,}1416 \qquad (9)$$

Ta reikšmė yra vien tuo nepatogi, kad jon įeinąs skaidinys $^{177}/_{1250}$ turi gana didelį ir per tai sunkiai atmenamą skaitiklį ir vardiklį.

Apytikrei Apolonijaus vertei (9) artimą, tik daug patogesnę, formą yr davęs garsus *Ptolomejas* (apie 151—125 pr. Kr.), būtent:

$$\pi = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166\ldots \qquad (10)$$

Kadangi jis, kaipo astronomas, yr vartojęs seksagezimalį ratlankio ir stipino dalymą, būtent, ratlankį da-

linęs 360 dalimis, skersmenį 120, stipiną 60 dalimis, tai spėjama, jis galėjęs Archimedo dydžiui π surastas ribas išreikšti šitaip:

$$3\frac{1}{7} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{34{,}28}{3600}; \quad 3\frac{10}{71} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{27{,}04}{3600}$$

iš kur, imdamas apskritą vidurinę jųdviejų vertę ir gavęs

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166\ldots$$

Ar jis yr nujautęs tos vertės žymų griežtumą, nėra žinios.

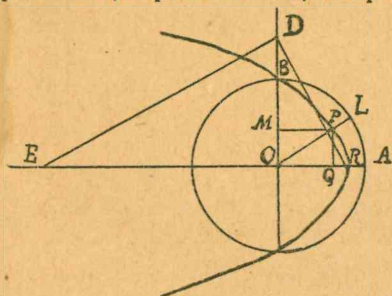
Žinomojo graikų mokslininko *Herono* (apie 110 pr. Kr.) raštuose yr užsilikus žinia, kad Archimedas viename iš savo vėlesnių, nūn žuvusių, veikalų yr nustatęs π dydžiui dar griežtesnes ribas, būtent:

$$\frac{211882}{67441} (= 3{,}1415904\ldots) < \pi < \frac{195882}{62351} (3{,}1416016\ldots) \quad (11)$$

Iš kitų graikų matematikų, užsiiminėjusių apribotųjų kreivomis linijomis plotų kvadratūromis, verta čia pažymėti dar *Hipokratas* iš Chioso (V amž. pr. Kr.), pagarsėjęs savo *meniskais* bei jo vardą nešiojančiais geometrijoje *mėnuliais*, ir *Hippyas* Elidietis (apie 400 m. pr. Kr.) Šis pastarasis yr išradęs ypatingą transcendenčią kreivąją, kurią *Dinostratas* (apie 335 m. pr. Kr.) yr pritaikęs ratilo kvadratūrai, nuo ko ji ir gavo *Dinostrato kvadratrisės* (*τετραγωνιζοῦσα*) vardą. Ji iš tikrųjų duoda griežtą ne tik ratilo kvadratūros, bet ir kampo trisekcijos išgvaldymą. Atskiri tos kreivosios punktai galima nubrėžti skriestuvu ir liniuote, bet kadangi visiems kreivosios punktams nustatyti reiktų padaryti begalinis brėžimų skaičius, tatai šis ratilo kvadratūros išgvaldymas ir nelaikomas *elementariu*.

Bet kaipo pirmutinė kreivoji, vedanti į griežtą kvadratūros išgvaldymą, Dinostrato kvadratrisė yra įdomi, ir

todel mes paduodame čia jos trumpą aprašymą. Ji sudaroma šiuo būdu. Tesie ratilo ketvirtis AOB (ž. 1br.). Iš punkto O, stipinu $OB = 1$, ir iš punkto A, lanku AB, slenka



1 brėž.

į priekį vienodu greitumu du punktu M ir L taip, kad abudu tuo pačiu laiku pasiekia punktą B. Dėliai šitokio jų slinkimo, kada punktas M prabėga $OM = \frac{OB}{n} = \frac{1}{n}$, tuomet punktas L prabėga lanką $AL = \frac{AB}{n} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$ · Nutieskim nūn iš punkto M paralelę $MP \parallel OA$. Ji su stipinu OL persikirs punkte P, kurio geometriškoji vieta ir sudarys Dinostrato kvadratrisę.[1]) Nuleidę iš punkto P perpendikularą (statmenį) $PQ \perp OA$, turėsime:

$OQ = MP = x$, $OM = PQ = y$, $\operatorname{tg} AOP = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

O kadangi $y = OM = \frac{1}{n}$, ir centralio kampo AOP $= \varphi$ lankas $AL = \frac{AB}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, tatai gauname du lyginiu:

$y = \frac{1}{n}$; $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, iš kur pašalindami *n*, randame galutinai kvadratrisės lyginį:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \dots \qquad (12)$$

---

[1]) Būdama periodinė, kvadratrisė turi daug šakų; 1-me brėžiny teparodyta jų tik viena.

$$\text{arba } x = \frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}$$

Jei R yra persikirtimo punktas kvadratrisės su ašimi OA, tuomet y—kui artinantis į nulį, OR bus = x, taip kad turėsime:

$$OR = x = \lim_{y=0} \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

arba: $OR : \sqrt{2} = \sqrt{2} : \pi$. Iš čia π apytikriai šiaip nubrėžiama: Padarę $OD = AB = \sqrt{2}$ ir nutiesę $ED \perp RD$, rasime $OD^2 = OE.\ OR$, arba $2 = OE.\ OR = OE.\ \frac{2}{\pi}$, iš kur. $\pi =$ OE. Bet kadangi kampui $AOP = \varphi$ einant į nulį OP artinasi į OR ir prie $\varphi = O$, $OP = OR$, todel punktas R elementariu brėžimu surasti negalima.

Rymiečiai, būdami labiau praktikos žmonės, geometrijos klausimais mažai teužsiiminėjo. Jie tenkinosi praktikoj mažesniu π vertės griežtumu, negu graikai. Tai matyt iš garsaus rymiečių architekto *Vitruvijaus* (14 m. po Kr.) veikalo „De architectura", kuriame paduota, kad ratilas stipinu lygiu 2 pėdom, turįs ratlankį $12^1/_2$ pėdų ilgą. Iš čia gaunama:

$$\pi = 3^1/_8 \ldots\ldots \qquad (13)$$

Daug didesnį griežtumą randam pas viduramžio indus. Jų matematikas *Aryabhatta* (gimęs 476 po Kr.) yr suradęs π dydžiui vertę $\pi = \frac{3927}{1250} = \frac{31416}{10000} = 3{,}1416$.

Savo apskaitymui jis naudojosi formula [1]):

$$s^2_{2n} = 2r^2 - r^2\sqrt{4r^2 - s^2_n} \qquad (14)$$

---

[1]) Ji paduodama visuose geometrijos vadovėliuose. Ji randas ir Šikšnio „Planimetrijos" II daly, 81 psl.

kur s_n reiškia tobūlo n-kampio šoną, o s_{2n} — dvigubai tiek šonų turinčio tobūlo daugiakampio šoną, r — ratilo stipiną. Prie $r = 1$ iš (14) gaunama

$$s^2_{2n} = 2 - \sqrt{4 - s^2_n} \quad (14)'.$$

Kadangi kvadrato šonas $s_4 = \sqrt{2}$, tatai iš (14)′ aštuonkampio šonui gausime reiškinį

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Tęsdami apskaitymą toliau rasime:

$$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$s_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \text{ ir t. t.}$$

Iš čia pigiai gaunama tų tobūlųjų daugiakampių perimetrai, (kuriuos žymėsime raide k), būtent:

$$k_4 = 4s_4 = 4\sqrt{2},\ k_8 = 8s_8 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \ldots$$

$$k_{64} = 64\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \text{ ir t. t.}$$

Vėlesnis arabų matematikas *Bhaskara* (gimęs 1114), šalia $\pi = \frac{22}{7}$ „negriežto“, vartoja Aryabhattos išrastąjį $\pi = \frac{3927}{1250}$, kaipo „griežtąjį“. Pas tą patį Bhaskarą randas ir Ptolomejiškė vertė $\pi = \frac{377}{120}$.

Brahmaguptos (gim. 598) veikaluose paduota tikrai indiška vertė $\pi = \sqrt{10}$. Kelias, kuriuo ji prieita, matyt, buvo šis. Prie ratilo diametru $= 1$ iš formulos (14) gaunama: $k_{12} = \sqrt{9{,}65}$, $k_{24} = \sqrt{9{,}81}$, $k_{48} = \sqrt{9{,}86}$, $k_{96} = \sqrt{9{,}87} \ldots$; iš čia indukcijos keliu spėta, kad

$$\pi = k_\infty = \sqrt{10} \ldots\ldots \quad (15)$$

Bet iš tikrųjų k_∞ artinas ne į $\sqrt{10} = 3{,}1623 \ldots$, bet

į $\sqrt{9,8696}\ldots = 3,14159\ldots$ Iš čia matom, kad matematikoj indukcijos kelias yra labai netikras.

Iš arabų matematikų savistoviai ratilo kvadratūros uždavinį tėra tyrinėjęs vienas tik *Ibn Alhaitam'as* (958—1038). Didžiausis arabų nuopelnas buvo vertimas graikų matematikų Euklido, Ptolomejo, Archimedo veikalų savon kalbon. Tuo būdu jie yr išlaikę nuo pražūties ne vieną tų minties galiūnų raštą.

Vakarų Europoje viduramžy maža kas kvadratūros klausimui tepadaryta. Pažymėti tenka nebent vienas *Leonardo Piziecio* (apie 1220) veikalas, kuriame jis, apskaitydamas tobūlo 96-kampio perimetrą, yr radęs kraštutines π ribas: $\frac{1440}{458^{1}/_{5}} = 3,1427\ldots$ ir $\frac{1440}{458^{4}/_{9}} = 3,1419\ldots$, iš kurių imdamas vidurinę vertę, yr išvedęs:

$$\pi = \frac{1440}{458^{1}/_{3}} = 3,1418\ldots \qquad (16)$$

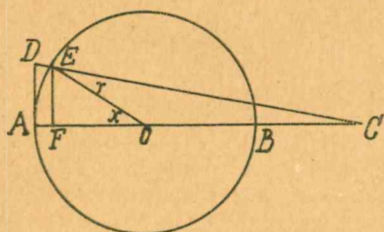
Pirmutinis padaręs žymų žingsnį pirmyn tuo klausimu buvo garsusis kardinolas *Mykalojus Kuza* (1401—1461), (kurio tikra pavardė buvo *Krebs*), kilęs iš miestelio *Kues*. Jis ratlankį sąvokojo kaipo daugiakampį, turintį begalinį šonų skaičių, ir stengės tobūlą trikampį paversti jam lygiadydžiu daugiakampiu, turinčiu kaskart didesnį šonų skaičių, ir tuo būdu galop prieiti ratilą. Kuza yr taipgi pirmutinis pradėjęs ieškoti bet kokio ratilo lanko *ištiesimo* (rektifikacijos), t. y. *suradimo duotajam lankui lygiailgės tiesiosios*. Tam tikslui jis yr pasiūlęs savo išrastą formulą (ž. 2 br.):

$$AE = rx = \frac{3\,r\,\sin x}{2 + \cos x}\ldots\ldots \qquad (17)$$

kur r reiškia ratilo stipiną, o x atatinkamąjį duotajam lankui centralį kampą.

Pasigaunant tos formulos, bet koks ratilo lankas AE geometriškai yra rektifikuojamas šiuo brėžimu:

Tesie AE rektifikuotinas lankas. Prailginama skersmuo AB vienu stipinu taip, kad BC būtų $= r$. Brėžiama $AD \perp AB$ ir jungiama punktai C, E tiesiąja CE, kuri perpendikularą AD perkirs punkte D. Tuomet tiesioji AD yra beveik lygi lankui AE. Ir iš tikrųjų iš proporcijos $AD : EF = CA : CF$ gaunama: $AD = \frac{EF . CA}{CF}$. Betkadangi $EF = r \sin x$, $CF = 2r + r \cos x$, $CA = 3r$, todel



2 brėž.

$$AD = \frac{3 r \sin x}{2 + \cos x}$$

Žinodami, kad $AE = r x$, matom, kad AD ir AE atatinka Kuzos formulai. Ji, žinoma, nėra griežta, bet apytikrė.

Jos griežtumo ribai surasti išrutulokim formuloj (17) sin x ir cos x žinomomis eilėmis ir tesie:

$$\frac{3 r \sin x}{2 + \cos x} = r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots) \ldots . (17),$$

tuomet turėsime lygybę:

$$3 r (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) =$$

$$r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) (2 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots),$$

iš kur įvykdę dauginimą ir sulyginę lygių laipsnių narius dešinėj ir kairėj lygybės pusėj, rasime koeficientams a_0, a_1, a_2 . . . atatinkamas vertes ir prieisime galop rezultatą:

$$AE = r (x - \frac{x^5}{180} - \frac{x^7}{1512} - \ldots).$$

Iš čia matom, kad lygindami AE = AD = r x darom klaidą atmesdami narius $-\frac{x^5}{180}-\frac{x^7}{1512}-\ldots$, kuri bus juo mažesnė, juo mažesnis bus x; pav., prie $x = 16^0$ klaida sieks vos 0,25″, prie $x = 36^0$ ji bus beveik lygi 2′ ir tt.

Kuzos formula galima taikinti ir π apskaitymui. Nes prie $x = 30^0$ lankas AE bus $= \frac{\pi r}{6}$; iš čia, prie $r = 1$, gausime:

$$\frac{\pi}{3}=\frac{3 \sin 30^0}{2+\cos 30^0}=\frac{3}{4+\sqrt{3}}=0{,}52337\ldots, \text{iš kur } \pi=3{,}14022.$$

Kampui einant didyn, didėja ir Kuzos formulos klaida. Pav., prie $x = 60^0$ iš tos formulos gautumėm:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{5}=1{,}03926\ldots \text{ iškur } \pi=3{,}11778\ldots$$

Visai originalį metodą ratilo kvadratūrai surasti yr pavartojęs garsusis *Leonardo da Vinci* (1452—1519). Jis, būdamas įvairių mašinų išradėjas, stengės ir ratilo kvadratūrą mechaniškai atsiekti. Iš tikrųjų, imant ratilinį rulį, kurio augštis yra lygus pamatinio ratilo stipino pusei, ir vyniojant jo šoninį paviršių plokštyje, gaunama, ruliui vieną kartą pilnai apsisukus, rulio paviršiaus statketurkampinis pėdsakas, kuris pigu paversti kvadratu.

Šešioliktame amžiuje Prancūzijoj ratilo kvadratūra užsiiminėjo kunigas *de Bouvelles* (1470—1553), davęs ne vieną apytikrį π nubrėžimą, o vienuolis *Jonas Buteo* (1492—1572) išleistame 1559 m. veikale *De quadratura circuli* duoda apžvalgą įvairių metodų, vedančių į kvadratūros klausimo išgvaldymą, kur tarp kitko pažymi, kad Ptolomejo vertė $\pi = 3\frac{17}{120}$ yra griežtesnė, negu archi-

mediškė $\pi = 3\frac{1}{7}$. *O Simonas Duchesne* pagarsėjo tuo, kad davęs apytikrę vertę:

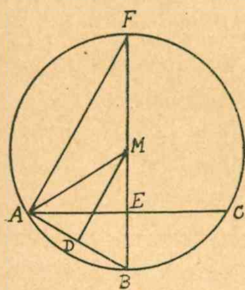
$$\pi = 3\frac{69}{484} = \left(\frac{39}{22}\right)^2 = 3{,}142561\ldots \quad (18)$$

tikrino, tai esanti absoliūčiai griežta π vertė. Į polemiką su Duchesne'u yr įsileidę ir žymesni matematikai, k. š. *Willebrord'as Snellius* (1580—1626) ir *Christionas Huygens'as* (1629—1695), žymiai pastūmėdami tą klausimą pirmyn. Jų pastangos buvo nukreiptos vienan tikslan, apskaityti kaskart didesnį dešimtainių π skaitmenų skaičių. Metodas tam tikslui vartota senas archimediškis, tik apskaitinėta perimetrai daugiakampių, turinčių kaskart didesnį šonų skaičių. Šioj srity labiausiai pasižymėjo prancūzų matematikas *Viètė* (1540—1603), kurs 1563 m. išleistame veikale, pradėjęs nuo įbrėžtojo ir apibrėžtojo šešiakampio, sistematišku dvigubinimu yr priėjęs įbrėžtojo ir apibrėžtojo 2^{16}. $6 = 393216$-kampio perimetrus ir nustatęs dydžiui π šias ribas:

$$3{,}1415926535\ldots < \pi > 3{,}1415926537\ldots \quad (19)$$

t. y. devyniais tikrais dešimtainiais skaitmenimis.

Iš kitos šalies eidamas Antifono (ž. 16—17 p.) ir Aryabhattos (ž. 20—21 p.) keliu, jis tęsė toliau jų apskaitymus šiuo būdu: Tesie AC (3 brėž.) ratilan įbrėžtojo tobūlo n-kampio šonas s_n; AB 2n-kampio šonas s_{2n}; MB ratilo stipinas $= 1$; ME tobūlan n-kampin įbrėžtojo ratilo stipinas ϱ_n, MD — tobūlan 2n-kampin įbrėžtojo ratilo stipinas ϱ_{2n}. Tesie įbrėžtųjų n ir 2 n-kampių plotai P_n, P_{2n}. Iš panašių trikampių ABE ir MBD gauname:



3 brėž.

$AB : MB = AE : MD$ arba $s_{2n} : 1 = \frac{s_n}{2} : \varrho_{2n}$, iš kur:

$$s_n = 2 s_{2n} . \varrho_{2n} \quad (20)$$

Bet kadangi $P_n = n. \frac{s_n \varrho_n}{2} = n. s_{2n} . \varrho_{2n} . \varrho_n$;

$P_{2n} = 2_n \frac{s_{2n} \varrho_{2n}}{2} = n. s_{2n} . \varrho_{2n}$, todel turime proporciją:

$P_n : P_{2n} = n . s_{2n} . \varrho_{2n} . \varrho_n : n . s_{2n} . \varrho_{2n} = \varrho_n : 1$, iš kur

$$P_{2n} = \frac{1}{\varrho_n} P_n \text{ arba } \frac{P_n}{P_{2n}} = \varrho_n \ldots . \quad (21)$$

Bet iš 3 brėž. matom, jog:

$$\varrho_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \; ; \; \varrho_{2n} = \sqrt{1 - \frac{s_{2n}^2}{4}} \ldots \quad (22)$$

Įstatydami pastarąjį reiškinį (20) formulon, gausime (14)' formulą:

$$s^2{}_{2n} = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$$

Tam pačiam šonui s_{2n} iš trikampio AMB gauname:

$$s^2{}_{2n} = 1 + 1 - 2 \cos AMB = 2 - 2 \varrho_n$$

Įstatydami šį reiškinį antrojon iš (22) formulų, rasime

$$\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varrho_n} \quad (23)$$

Kadangi įbrėžtam kvadrate esama:

$$P_4 = 2 , \; \varrho_4 = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

todel naudojantis (23) formula rasime:

$$\varrho_8 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}, \; \varrho_{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

ir t. t. . . . .

Imkim nūn du tobūlu daugiakampiu: kvadratą ir n-kampį. Jų plotų santykiui galima bus duoti šis pavidalas:

$$\frac{P_4}{P_n} = \frac{P_4}{P_8} \cdot \frac{P_8}{P_{16}} \cdot \frac{P_{16}}{P_{32}} \cdots \frac{P_{\frac{n}{4}}}{P_{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{P_{\frac{n}{2}}}{P_n} \quad (24)$$

Tarę, kad formuloj (24) n didėja lig ∞ ir pastebėję, kad $P_\infty = \pi r^2 = \pi$ (prie $r = 1$), iš tos pat (24) form. gausime

$$\frac{P_4}{\pi} = \frac{P_4}{P_8} \cdot \frac{P_8}{P_{16}} \cdot \frac{P_{16}}{P_{32}} \cdot \frac{P_{32}}{P_{64}} \cdots$$

O kadangi $\frac{P_n}{P_{2n}} = \varrho_n$ (21), tatai santykiui $\frac{P_4}{\pi}$ galime priduoti dar šį pavidalą:

$$\frac{P_4}{\pi} = \varrho_4 \,.\, \varrho_8 \,.\, \varrho_{16} \ldots$$

Įstatydami čion 2 vietoj P_4 ir vietoj ϱ_8, $\varrho_{16} \ldots$ augščiau gautas jiems atatinkamas vertes, prieisime galutinai formulą:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \quad (25)$$

Šioj formuloj Viètė yr davęs pirmutinį griežtą analitišką π išreiškimą ir draug pirmą nesibaigiamą padaugą. Jo susibėgamybės (konvergencijos) įrodymu Viètė nesirūpino; tai buvo nepersenai (1891) vokiečio Rudio padaryta.

Formulai (25), pasigaunant trigonometrijos funkcijų, galima dar duoti ir kitas pavidalas. Nes žinodami, kad

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45° = \cos\frac{90°}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \cos\frac{45°}{2} = \cos\frac{90°}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = \cos\frac{45°}{4} = \cos\frac{90°}{8} \text{ ir t. t.,}$$

iš (25) gauname:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90°}{2} \cdot \cos\frac{90°}{4} \cos\frac{90°}{8} \cdots \quad (26)$$

Kaip žemiau pamatysim, ši formula yra atskiras žygis bendresnės Eulero formulos.

Viėtė yr davęs ir π nubrėžimą, remdamasis apytikre lygybe:

$$\pi = 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}1416 \qquad (27)$$

Iš (27) savaime plaukia, kad ratilo ratlankis yra lygus perimetrui statkampio trikampio, kurio katetai (statiniai) yra lygūs $\frac{6}{5}$ ir $\frac{3}{5}$ ratilo skersmenio, leidžiant šį pastarąjį esant lygų $= 1$.

Nepaprastos ištvermės ir gabumo vesti apskaitymus yr parodęs *Ludolfas van Ceulen* (1539—1610). Sumanęs apskaityti π dviem dešimtim tikrų dešimtainių skaitmenų, jis Aryabhattos metodu varė savo apskaitymą iki $15 \cdot 2^{31}$-kāmpio. Vėliau pastūmėjo jį iki 32 dešimtainių skaitmenų (iš 2^{62}-kampio), galop, pasigaudamas formulos $s_{2n} = \sqrt{2(1 - \varrho_n)}$, gavo π 35 tikrais dešimtainiais skaitmenimis. Tuo jis dideliai didžiavos ir savo testamente įsakė, kad tie 35 skaitmenys būtų iškalti jo kapo akmenyje. Dėliai to šis skaičius ir vadinas *Ludolfiniu.*

Ludolfo bendralaikis *Adrianas Anthonisz* (1529—1607) labiau žinomas iš savo lotynizuoto *Adriano Mecijaus (Metius)* vardo, yra paminėtinas kaipo atradėjas santykio $\pi = \frac{355}{113}$, kurs yra žymiai griežtesnis neg senoviniai $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$ (Archimedo), 3,1416 (Ptolomejo ir indų). Tą santykį jis yr priėjęs polemizuodamas su Duchesne'u atskirame rašte, kur jis yr nustatęs π dydžiui siauresnes ribas, būtent:

$$3\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120} \text{ arba } \frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$$

Imdamas vardiklių 333 ir 377 ir skaitiklių 106 ir 120 pusę, jis ir gavęs vertę $\frac{710}{226}$, kuri yra lygi $\frac{355}{113}$. Tas santykis vadinama *Mecijaus santykiu.* Bet naujausi tyrinėjimai yr parodę, kad jį anksčiau yr priėjęs[1]) *Valencijus Otho* (1550—1605), davusis jam naują formą:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2} \cdots \quad (28)$$

Šioj formoj jis duodas lengvai geometriškai nubrėžti. Tam tikslui tesie CD = 1 (ž. 4 brėž.), o CE = $^7/_8$. AF = $^1/_2$; be to tesie FG ∥ CD ir FH ∥ EG, tuomet turima:

AH : AG = AF : AE, arba $AH = AG \cdot \frac{AF}{AE}$ ir AG : AC = = AF : AE, arba $AG = AC \cdot \frac{AF}{AE}$

Kadangi AC = 1, tai $AH = \frac{AF^2}{AE^2}$

Bet $AE^2 = 1 + \frac{7^2}{8^2} = \frac{7^2+8^2}{8^2}$, o $AF^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Iš čia

$$AH = \frac{8^2}{4\,(7^2+8^2)} = \frac{4^2}{7^2+8^2}.$$

4 brėž.

Tuo būdu ratlankis $2\pi r = 2\pi = 3\ AC + AH$.[2])

Pažymėtinas čia apytikris lanko nubrėžimas, išrastas Snelliaus. Tam tikslui tiesiajai CD (iš 2 brėž.) brėžiama paralelė JOK (ž. 5 brėž.) ir jei GHK ⊥ AC, tai galima trikampis GOC leisti esąs apytikriai lygiašalis, nes punktai H ir B prie mažojo x yra labai artimi vienas

[1]) Dar anksčiau (V amž. po Kr.) jį kaipo „griežtą" yr vartojęs kynų matematikas *Tsu-Chung-Chih* šalia $^{22}/_7$ kaipo „negriežto".

[2]) Šis nubrėžimas pridera holandų matematikui *Jokūbui Gelderui* (1765—1848).

5 brėž.

antram. Iš to aptarimo seka, kad: $\angle GOH = \angle GCO = \varphi$; $\angle OGE = \angle OEG = 2\varphi$ ir $\angle EOA = \angle OEC + \angle ECO = 2\varphi + \varphi = 3\varphi$.[1]) Bet $AJ = r \operatorname{tg} \varphi$; $DJ = GK = 2\,GH = 2\,r \sin \varphi$. Iš čia gauname: $AD = AJ + DJ = r(\operatorname{tg} \varphi + 2 \sin \varphi)$; iš čia žinant, kad $\varphi = \frac{x}{3}$ (ž. 2 brėž.) galutinai randama, kad apytikriai bus:

$$AD = rx = r\left(2 \sin \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}\right) = r\left(\frac{2 \sin x + \operatorname{tg} x}{3}\right) \quad (29)$$

Taikant šią formulą ir augščiau išvestąją Kuziškę (17)

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

π apskaitymui, iš šešiakampio ($x = 30°$) gauname ribas 3,14160... ir 3,14023...; iš 96-kampio surandame jau 6 tikrus dešimtainius skaitmenis $3,14159283... < \pi < 3,14159212...$; 2^{30}-kampis yr davęs Snelliui 34 tikrus skaitmenis. Iš čia matom, kad Kuzos ir Snelliaus formulos kur kas greičiau veda į π apskaitymą, neg Archimedo metodas. Archimedas iš 6-kampio tegavo ribas 3 ir 3,46, iš 96-kampio tik 3,1428... ir

[1]) Tuo drauge ir kampas $EOA = x$ yra padalomas trimis lygiomis dalimis. Prie x nedidelio, jo trisekcijai užtenka padaryti $BC = OB$.

3,14112... Taigi Archimedo metodas toli gražu negali lygintis su Snelliaus metodu. Naudodamasis šio pastarojo formula jezuitas *Christ. Griesingeris* (1561 — 1636) yr apskaitęs π 39 tikrais dešimtainiais skaitmenimis. Antras jezuitas *Grigalius nuo Šv. Vincento* yr 1647 m. išleidęs storoką veikalą „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni", kuriame nurodė keturis metodus rat. kvadratūrai išgvaldyti. Ši knyga yr sukėlus daug karštų ginčų. Juose dalyvavo ir garsusis matematikas *Christionas Huygensas*, išleidęs 1654 m. savo veikalą „De circuli magnitudine inventa", kuriame ne tik išvedė Kuzos ir Snelliaus formulas, bet ir parodė, kad dydžiui π galima surasti dar siauresnės ribos negu surastosios senovėje.

Tyrinėdamas Snelliaus formulas jis yr įrodęs, kad

$$x < \frac{2}{3} r \sin x + \frac{1}{3} r \operatorname{tg} x$$

r ratilo ratlankiui rado šias ribas:

$$\frac{1}{3} K_{2n} + \frac{2}{3} k_{2n} > 2\pi r > \frac{4}{3} k_{2n} - \frac{1}{3} k_n, \qquad (30)$$

kur K_{n2} reiškia apibrėžtojo $2n$-kampio perimetrą, k_{2n} įbrėžtojo $2n$-kampio ir k_n — įbrėžtojo n-kampio perimetrus.

Formula (30) prie $n = 6$ duoda ribas

$$3{,}1411\ldots < \pi < 3{,}1423\ldots$$

prie $n = 30$ iš jos gaunama:

$$3{,}1415917\ldots < \pi < 3{,}141594\ldots$$

kada Archimedas iš 96-kampio tėra gavęs vos du tikru dešimtainiu skaitmeniu.

Snelliaus ir Huygenso tyrinėjimais baigiasi šis pirmasis elementariai-geometriškasis periodas. Apskaitymas π patobūlintais metodais žymiai palengvinta

ir surasta π dydis 39 tikrais dešimtainiais skaitmenimis. Šis ir tas iš tyrinėtojų buvo priėjęs įsitikinimą, kad griežtas ratilo kvadratūros išgvaldymas yra negalimas, bet jų neįstengta tai matematiškai įrodyti.

Augštosios analizės laikotarpis.

Šiame antrame ratilo kvadratūros istorijos laikotarpy matematikai stengėsi gauti analitiškų reiškinių, sudarytų tam tikra nesibaigiamų veiksmų eile, kurie duotų lanko vertę, kaipo stipino bei centralio kampo funkciją. Išvedimas tokių reiškinių bet kokiam lankui tapo galimas nuo laikų *Izaoko Newton'o* (1643—1727) ir *Leibniz'o* (1647—1716), kuriuodu, remdamies savo pranokėjų *Grigaliaus nuo Šv. Vincento, Kepler'io* (1571—1630), *Cavalier'io* (1591—1647), *Fermat'o* (1601—1663), *Tacquet'o* (1612—1660) ir *Johno Wallis'o* (1610—1703) tyrinėjimais nepriklausomai nuo vienas kito yr išradę diferencialį ir integralį skaičiavimą, ištobūlintą vėliau brolių *Bernoullių* ir *Eulero*. Tasai *augštesniuoju* pavadintasai skaičiavimas yr žymiai pirmyn pastūmėjęs ir π apskaitymą.

Išreikšti π analitiškai tam tikra nesibaigiamų veiksmų eile tegalima vien *nesibaigiamomis eilėmis, nesibaigiamai tęsiamais skaidiniais* ir *nesibaigiamais padaugais.* Pastarieji logaritmavimu lengvai paverčiami nesibaigiamomis eilėmis.

Viète's išrastasai nesibaigiamas padaugas:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

kaip augščiau matėme, buvo pirmutinis analitiškas, tikrai griežtas π reiškinys.

Antrą tai pačiai $\frac{2}{\pi}$ vertei nesibaigiamą padaugą yr užtikęs *Wallis*; 1655 m. jis yr radęs:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}\ldots \quad (31)$$

Šis reiškinys, kaipo reikalaująs vien racionalių veiksmų, yra daug patogesnis negu Vietiškis. Wallis prie tos progos yr išsitaręs, $\frac{2}{\pi}$ nesą galima lyginių šaknimis išreikšti, bet to jis neįrodė.

Wallis'ui pranešus savo išradimą *Lordui Brouncker'ui* (1620—1680), šis iš savo šalies nusiuntė Wallis'ui, nenurodydamas kelio, kuriuo yr priėjęs, naują $\frac{4}{\pi}$ reiškinį šio nesibaigiamai tęsiamojo skaidinio pavidale:

$$\frac{4}{\pi}=\cfrac{1}{1+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}} \quad (32)$$

Bet užvis daugiausia šiame dalyke yr nuveikęs Newton'as. Jis nuo 1666 m. užsiiminėjo nesibaigiamų eilių klausimu ir 1669 m. yr parašęs platesnį tyrinėjimą, kuriame iš jau žinomos natūralių logaritmų eilės:

$$\mathrm{l}\,(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

yr išvedęs eksponencialę eilę:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots.(-\infty<x<\infty)$$

sinų eilę:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots(-\infty<x<\infty)$$

kosinų eilę:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots (-\infty < x < \infty)$$

arksinų eilę:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots (-1 < x < 1)$$

Trijose pastarose eilėse x reiškia lanką, kuriam ratile stipinu = 1 atatinka α ° centralis kampas, taip kad visada esama proporcijos:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = x : 2\pi$$

iš kur $\alpha^\circ = \frac{x \cdot 360^\circ}{2\pi} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$, kame $\frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}3^\circ =$ $= 3437{,}7' = 206265''$. Dėliai to $\sin 2\pi = \sin 360^\circ$, $\sin \pi = \sin 180^\circ$, $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ$ ir t. t.

Arc sin x reiškia lanką ratile stipinu = 1, kurio sinas yra lygus x; taigi pav. arc sin $\frac{1}{2}$ bus $= \frac{\pi}{6}$, arc tg $1 = \frac{\pi}{4}$, nes $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Naudodamasis savo išrastomis sinų ir kosinų eilėmis, Newton'as yr radęs šią naują apytikrę formulą lankams rektifikuoti:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x} \qquad (33)$$

Ji gauta šiuo būdu:

Iš $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{126} + \ldots$, apleidus narius augštesniais neg 5 laipsniais prie x, gaunama:

$$\sin x \cos x = x - \frac{4x^3}{6} + \frac{16x^5}{120} \quad \Big| \; 1$$

be to

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \Big| \; a \qquad (34)$$

$$\cos x = x - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} \quad \Big| \; bx$$

Norėdami pašalinti iš čia x^3 ir x^5 padauginkim 1-ją šių lygybių vienetu, 2-ją — daugikliu a, 3-ją — daugikliu bx. Dėstymu gausime:

$$\sin x \cos x + a \sin x + bx \cos x =$$
$$= x(1 + a + b) - \frac{x^3}{6}(4 + a + 3b) + \frac{x^5}{120}(16 + a + 5b) .. (35)$$

Nūn prileidę, kad

$$4 + a + 3b = 0$$
$$16 + a + 5b = 0,$$

rasime iš čia $a = 14$, $b = -6$.

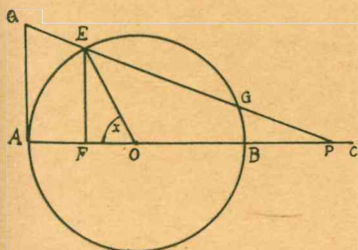
Per tatai lyginys (35) virs:

$$\sin x \cos x + 14 \sin x - 6 x \cos x = 9x$$

iš kur galutinai ir gaunama ieškomoji apytikrė formula:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}.$$

Atmetę (34) lyginiuose narius augštesniais x'o laipsniais negu 3 ir padauginę tais pat daugikliais 1, a ir bx, gautumėm augščiau minėtąją (17) Kuziškę formulą. Iš čia aišku, kad Newton'o formula yr žymiai griežtesnė negu Kuziškė. Ji irgi tinka π apskaitymui. *Lambertas* (1728—1777) yr davęs šį jos nubrėžimą: Teesie AE rektifikuotinas lankas (ž. 6 brėž.) ir BC = OB. Nuo punkto C atrėžkim iš kairės $PC = \frac{AF}{5}$. Sujunkim punktus P ir E tiesiąja PE, tuomet AQ bus $= x$. Ir iš tikrųjų, $\angle EOA = x$ ir $OA = OB = 1$, tuomet iš proporcijos $AQ : EF = PA : PF$ rasime:



6 brėž.

3*

$$AQ : \sin x = \left[3 - \frac{1}{5}(1 - \cos x)\right] : \left[3 - \frac{6}{5}(1 - \cos x)\right]$$

iš kur gaunama:

$$\frac{AQ}{\sin x} = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x} = \frac{x}{\sin x}$$

taigi apytikriai $AQ = x$.

Apskaitymas π pasigaunant nesibaigiamų eilių.

Anglų matematikas *James Gregory* (1638—1735) sužinojęs iš Collins'o apie Newton'o išradimus nesibaigiamų eilių srity, po ilgų nepavykusių bandymų išrado galop arktangensų eilę:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} = \cdots \quad (-1 < x < 1) \qquad (36)$$

Ši eilė duoda galimybės bet kokiam tangensui x surasti atatinkamąjį lanką $\operatorname{arc\,tg} x$.

Kadangi $\operatorname{tg} 45° = 1$ arba ratlankio dalyse $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$,

todel $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$; per tai iš (36) dėdami jon 1 vietoj x

gauname: $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots . \qquad (37)$$

Ši nesibaigiamoji eilė išrasta Leibnico 1673 m. nepriklausomai nuo Gregory ir todel teisingai vadinamoji Leibnizo eilė, praktiškam π apskaitymui netinka, nes norint gauti iš jos π dviem tikrais dešimtainiais skaitmenimis, reiktų imti daugiau neg 300 jos narių, o 20-im tikrų skaitmenų reiktų imti $5 . 10^9$ narių, kas yra absoliūčiai neįvykdoma.

Kur kas greičiau susibėgamoji eilė gaunama iš arksinų eilės:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 . 3}{2 . 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

nes prie $x = \frac{1}{2}$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, taigi iš tos eilės gaunam:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \ldots \qquad (38)$$

Newton'as iš jos yr apskaitęs π penkiolika dešimtainių skaitmenų.

Iš arktangensų eilės (36) prie $x = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, gaunama nauja eilė:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \ldots\right) \qquad (39)$$

Naudodamasi tąja eile anglų astronomas *Abraomas Sharp'as* (1651—1742), patariamas garsaus *Halley'o,* yr apskaitęs π 72 dešimtainiais skaitmenimis. 1719 metais prancūzas *de Lagny* paskelbė π apskaitytą 127 skaitmenimis.

Sulygindami arksinų eilę su arktangensine, matom, kad ši pastaroji dėliai savo prastesnių koeficientų geriau tinka π apskaitymams. Belieka tik ji taip perkeisti, kad paėmę nedidelį narių skaičių, gautumėm π vertę su gana dideliu tikrų skaitmenų skaičium. Tam tikslui geriausiai tinka arktangensų funkcijos dėstymo teorema. Ji gaunama šiuo keliu. Iš

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

prileidę $\operatorname{tg}\alpha = u$, $\operatorname{tg}\beta = v$, (iš kur $\alpha = \operatorname{arctg} u$; $\beta = \operatorname{arctg} v$) turime: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{u + v}{1 - uv} = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v)$, iš kur gauname:

$$\text{arctg}u + \text{arctg}v = \text{arctg}\frac{u+v}{1-uv} \qquad (40)$$

prileidę $\frac{u+v}{1-uv} = 1$, ir žinodami, kad arctg $1 = \frac{\pi}{4}$, rasime iš (40)

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctg}u + \text{arctg}v. \qquad (41)$$

Belieka nūn išreikšti u kaipo v funkciją. Tam tikslui, prileidę $\frac{u+v}{1-uv} = 1$, randame:

$$u + v = 1 - uv$$

$$\text{iš kur } u = \frac{1-v}{1+v} \qquad (42)$$

Taigi duodami v bet kokią vertę, visada gausime iš (42) ir atatinkamą u vertę. Pav. teesie $v = \frac{1}{2}$, tai u bus $= \frac{1}{3}$ ir mes iš (41) gausime Eulerio formulą.

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\frac{1}{2} + \text{arc tg}\frac{1}{3} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{3 \cdot 3^5} - \frac{1}{3 \cdot 3^7} + \cdots\right) \qquad (43)$$

Tuo keliu galima gauti ir daugiau panašių formulų. Formuloj (43) arctg $\frac{1}{2}$ eilė nepergreit susibėga. Norėdami gauti arctg $\frac{1}{2}$ eilių greičiau susibėgančiųjų, prileiskim, kad $\frac{u+v}{1-uv} = \frac{1}{2}$, tuomet prie $u = \frac{1}{3}$, bus $v = \frac{1}{7}$, taip kad

$$\text{arctg}\frac{1}{2} = \text{arctg}\frac{1}{3} + \text{arctg}\frac{1}{7}.$$

Įstatę šią arctg $\frac{1}{2}$ vertę (43) lygybėn, gausime:

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{arctg}\frac{1}{3} + \text{arctg}\frac{1}{7} \qquad (44)$$

Radę panašiu būdu, kad

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$$

iš (44) turėsime:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \qquad (45)$$

o iš (44) gausime

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \qquad (46)$$

Gausas yr davęs eilių dar greičiau susibėgančiųjų, būtent:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \qquad (47)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{38} + 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{268} \qquad (48)$$

Euleris, kuris yr davęs didelę daugybę π išrutulojimų nesibaigiamomis eilėmis, pasiūlė tarp kitko šią formulą:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} \qquad (49)$$

o arktangensų apskaitymams naudojosi šia savo irgi išrastąja eile:

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Dedant čion $t = \frac{1}{7}$, reiškinys $\frac{t^2}{1+t^2}$ tampa $= \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$; dedant $t = \frac{3}{79}$, gaunama $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$. Tuo būdu formula (49) virsta:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{7}{10}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{2}{100}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{2}{100}\right)^3+\ldots\right\}+$$
$$+\frac{7584}{100000}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2+\right. \quad (50)$$
$$\left.+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3+\ldots\right\}$$

Jos pasigaudamas Euleris per vieną valandą yr apskaitęs π 20 tikrų skaitmenų.

Visas jos nepatogumas, kad joje antros dalies išrutulojimas tenka dauginti skaidiniu $\frac{7524}{100000}$ su keturženkliu vardikliu.

Patogesnė yra 1706 m. *Machino* išrastoji formula:

$$\frac{\pi}{4}=4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239} \quad (51)$$

Ji gaunama šiuo būdu. Teesie $a=\operatorname{tg}\alpha$ racionalis skaidinys; tuomet racionaliais skaidiniais bus ir $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha, \ldots \operatorname{tg} n\alpha$. Tai žinodami pasirinkim tokį n, kad $\operatorname{tg} n\alpha$ būtų kuo artimesnis vienetui. Teesie $n\alpha<\frac{\pi}{4}$, tuomet $\operatorname{tg} n\alpha=b$ bus >1; dėliaito rasime, kad ir

$$\operatorname{tg}\left(n\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{b-1}{1+b}=c$$

bus irgi racionalis skaidinys. Iš čia gi gauname:

$$n\alpha-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} c, \text{ arba}$$

$$\frac{\pi}{4}=n\alpha-\operatorname{arctg} c=n \operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} c.$$

Bet jei $a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, tai $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{120}{119}$. Pastarasis dydis labai atitinka

prileidimui $\operatorname{tg} n\alpha > 1$, nes yra labai artimas vienetui ir draug yra bent kiek didesnis neg 1.

Iš čia gi gauname:

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \text{ iš kur}$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}, \text{ arba}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \operatorname{artctg}\frac{1}{239}$$

o kadangi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ arba $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, tai galutinai rasime:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad (51)^1$$

Norėdamas gauti $4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ išrutulojimui eilę dar labiau susibėgančią, *Buzengeigeris* (1771—1835) padarė formuloj (51) šitokį perkeitimą. Paėmęs $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{1}{10}$ jis rado, kad

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2.\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99} = \operatorname{tg}\frac{1}{5} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{20}{99} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{20}{99}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{1}{515}, \qquad \text{iš kur}$$

$$\alpha = 2\alpha' - \operatorname{arctg}\frac{1}{515} = 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{10} - \operatorname{arctg}\frac{1}{515} = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$$

Įstatydami šį reiškinį lygybėn (51) vietoj $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, rasim galutinai šią Buzengeigerio formulą:

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad (52)$$

Išreiškim ją trumpiau:

$$\frac{\pi}{4} = 8\,A - 4\,B - C$$

taip kad $A = \text{arctg}\,\frac{1}{10}$, $B = \text{arctg}\,\frac{1}{515}$, $C = \text{arctg}\,\frac{1}{239}$;
tuomet užtenka pirmos eilės tepaimti 4 nariai, abiejų likusių po 2 nariu, kad gautumėm π septyniais tikrais dešimtainiais skaitmenimis, kaip tai matyt iš žemiau dedamojo apskaitymo:

$$\frac{1}{10} = 0{,}100\,000\,000$$
$$\frac{1}{5 \cdot 10^5} = 0{,}000\,002\,000$$
$$-\frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0{,}000\,333\,333$$
$$-\frac{1}{7 \cdot 10^2} = 0{,}000\,000\,014$$
$$A = 0{,}099\,668\,653$$

$$\frac{1}{515} = 0{,}001\,941\,747$$
$$-\frac{1}{3 \cdot 515^3} = 0{,}000\,000\,002$$
$$B = 0{,}001\,941\,745$$
$$\frac{1}{239} = 0{,}004\,184\,100$$
$$-\frac{1}{3 \cdot 239^3} = 0{,}000\,000\,024$$
$$C = 0{,}004\,184\,076$$

Iš čia gaunama

$$\frac{\pi}{4} = 8A - 4B - C = 0{,}785\,398\,168,$$

taigi $\pi = 3{,}141\,592\,672.$

A vertė yra daugiausia 2 vienetais perdidelė; vertės B ir C kokiu 1 vienetu perdideli, taigi 8A — 4B — C daugiausia kokiais 21 vienetu perdidelė, o padauginta 4-iais bus daugiausia 84 vienetais perdidelė. Tuo būdu tikroji π vertė randas tarp 3,141592672 ir 3,141592588. Taigi gautasai π dydis bus tikras iki 8-to dešimtainio skaitmens. Naudodamasis (45) formula *Vega* (1756—1802) yr apskaitęs dydžio π 140 dešimtainių skaitmenų. *W. Rutherford'as* pasigaudamas formulos

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99} \qquad (53)$$

pratęsė π apskaitymą iki 208-to skaitmens, bet, dėliai padarytos 153 skaitmeny klaidos, visi likusieji buvo netikri. Vėliau 1853 jis apskaitė π iki 440-to skaitmens. Prof. *Richteris* iš Elbingo 1855 m. yr paskelbęs savo apskaitymą π siekiantį 500 skaitmenų. Anglų matematikas *Shanks'as* pratęsė π apskaitymą net iki 707 skaitmens. Praktiškos vertės tie apskaitymai kol kas neturi; jie tik parodo, kaip žymiai yr nūn ištobūlinti apskaitymo metodai, sulyginus su senovės laikais. Norėdami turėti supratimo apie griežtumą, kokį teikia tie apskaitymai, paimkim π tiktai 25-iais tikrais skaitmenimis. Jei nūn mums būtų duota uždavinys, apskaityti ratlankis, kurio stipinas yra lygus žemės centro nuo artimiausios žvaigždės toliui, tai pigiai galėtumėm tai padaryti griežtai iki vienos milionosios milimetro dalies. O koks griežtumas glūdi šimte π skaitmenų, žmogaus protas tiesiog negali nė įsivaizduoti.

Kiti griežti π išreiškimai.

Be nesibaigiamų eilių π galima išreikšti dar nesibaigiamais padaugais. Jie lengviausiai prieinama šiuo keliu. Teesie lyginys $\sin x = o$. Iš trigonometrijos žinome, kad jis turės nesibaigiamą šaknų skaičių. Ir iš tikrųjų duodami čia x-ui reikšmių $x = 0$, $x = \pm \pi$, $x = \pm 2\pi$, $x = \pm 3\pi \ldots$, išvysime, kad prie visų jų pirmoji lyginio $\sin x = 0$ dalis daros lygi nuliui. Šis faktas duoda mums teisės prileisti, kad reiškinyje $\sin x$ esama daugiklių x, $x^2 - \pi^2$, $x^2 - (2\pi)^2$, $x^2 - (3\pi)^2 \ldots$; todel galima padėti:

$$\sin x = ax\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - 4\pi^2)\,(x^2 - 9\pi^2)\ldots \quad (54)$$

kame a yra tam tikras, arčiau neapibrėžiamas, koeficientas. Iš čia gauname:

$$\frac{\sin x}{x} = a\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - 4\pi^2)\,(x^2 - 9\pi^2)\ldots \quad (55)$$

Bet iš eilės:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

randame

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\ldots$$

iš kur matom, kad, x-ui artinantis į 0, santykis $\frac{\sin x}{x}$ artinsis į 1, kaipo į savo ribą prie $x = 0$. Todel iš (54) prie $x = 0$ gausime

$$1 = a\,(-\pi^2)\,(-4\pi^2)\,(-9\pi^2)\ldots. \quad (56)$$

Dalydami lygybę (54) lygybe (56) rasim:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots \quad (57)$$

Panašiu būdu galima rasti ir

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots \quad (58)$$

Padėję formulon (57) $\frac{\pi}{2}$ vieton x gausime:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{63}{64}\cdots$$

iš kur randame jau augščiau minėtąjį *Wallis'o* nesibaigiamąjį padaugą

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4\,.\,16\,.\,36\,.\,64\ldots}{3\,.\,15\,.\,35\,.\,63\ldots}\ldots = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\ldots}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\ldots.} \quad (31)'$$

Padėję ton pat (57) form. $\frac{\pi}{6}$ viet. x, gausime dydžiui π kitą nesibaigiamąjį padaugą:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3\,.\,6\,.\,6\,.\,12\,.\,12\,.\,18\,.\,18\ldots}{2\,.\,5\,.\,7\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19\ldots}\cdots \qquad (59)$$

Žinodami, kad $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ iš (57) form. randame:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{2^2\,.\,4}\right)\left(1-\frac{1}{4^2\,.\,4}\right)\left(1-\frac{1}{6^2\,.\,6}\right)\ldots,$$

o iš čia

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\,.\,16\,.\,16\ldots}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\ldots} \qquad (60)$$

Abi pastaroji form. (59) ir (60) pridera *Euleriu.*

Išreiškimas π nesibaigiamu daugiklių skaičium galima laikyti π transcendentumo žyme. Tačiau jos vienos π transcendentumui įrodyti neužtenka, nes esama nesibaigiamų padaugų, kaip šit:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\,.\,3\,.\,5\,.\,11\,.\,13\,.\,19\,.\,21\,.\,27\,.\,29\ldots}{1\,.\,4\,.\,4\,.\,12\,.\,12\,.\,20\,.\,20\,.\,28\,.\,28\ldots}\cdots \qquad (61)$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\,.\,7\,.\,17\,.\,19\,.\,29\,.\,31\,.\,41\,.\,43\ldots}{6\,.\,6\,.\,18\,.\,18\,.\,30\,.\,30\,.\,42\,.\,42\ldots}\cdots \qquad (62)$$

$$\sqrt{2}=\frac{2\,.\,2\,.\,6\,.\,6\,.\,10\,.\,10\,.\,14\,.\,14\ldots}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\ldots}\cdots \qquad (63)$$

$$\sqrt{3}=\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,8\,.\,10\,.\,14\,.\,16\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,9\,.\,9\,.\,15\,.\,15\ldots}\cdots, \qquad (64)$$

kuriems atitinka dydžiai geometriškai elementariu būdu pigiai nubrėžiami; o yra ir tokių eilių, kaip šit Eulerio:

$$2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots \qquad (65)$$

ir net $$1=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdots, \qquad (66)$$

kurios atinka visai racionaliams dydžiams.

Tas pats Euleris yr davęs ne vieną nesibaigiamą padaugą ir π laipsniams išreikšti, kaip šit:

$$\frac{\pi}{8}=\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\frac{13^2}{13^2-1}\cdots \quad (67)$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{3^3}{3^3+1}\cdot\frac{5^3}{5^3-1}\cdot\frac{7^3}{7^3+1}\cdot\frac{11^3}{11^3+1}\cdot\frac{13^3}{13^3-1}\cdots \quad (68)$$

$$\frac{\pi^6}{960}=\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdots \quad (69)$$

ir tt.

Pas Eulerį randame ir daugybę nesibaigiamų eilių π laipsniams išreikšti, k. š.:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots \quad (70)$$

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots \quad (71)$$

$$\frac{\pi^4}{30}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}\cdots \quad (72)$$

ir tt.

Be nesibaigiamų eilių ir padaugų yra ir kitokių griežtų π išreiškimų. Mes čia pažymėsim tik du mažai žinomu, išrastu lenkų matematiko-filosofo *Hoene-Wronskio* (1778—1853). Pirmutinis yra gautas iš faktorialų (factorielles) teorijos. Faktorialais vadina Wronskis funkcijas tipo

$$x^{m|r}=x\,(x+r)\,(x+2r)\,(x+3r)\,(x+4r)\ldots.\,(x+(m-1)\,r) \quad (73)$$

Prie $r=o$ iš (73) gaunam $x^{m|o}=x^m$. Iš čia matom, kad x^m yra atskiras žygis $x^{m|r}$. Wronskis yr parodęs, kad tarp funkcijų $x^{m|r}$ ir x^m yra didelio panašumo. Prie $m=\frac{1}{n}$ skaidyto skaičiaus abi $x^{\frac{1}{n}|r}$ ir $x^{\frac{1}{n}}$ veda į atskirų iracionalių skaičių sritį. Pasigau-

damas tų faktorialų skaidytais laipsniais Wronskis priėjo šią įdomią formulą:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1^{\frac{1}{2}\,|\,1}\right)^2 \qquad (74)$$

Nemažiau įdomi yra ir kita Wronskio formula

$$\pi = \frac{2\infty}{\sqrt{-1}}\left[\left\{1+\sqrt{-1}\right\}^{\frac{1}{\infty}} - \left\{1-\sqrt{-1}\right\}^{\frac{1}{\infty}}\right] \qquad (75)$$

Wronskis ją labai brangino pirmiausia del to, kad ji išreiškia π užbaigtoj formoj, antra — kad jon įeinantieji dydžiai yra sujungti elementariais veiksmais, trečia, kad ji duodanti galutiną ratilo kvadratūros išgvaldymą, parodydama absoliūčią geometriškojo π elementariu būdu nubrėžimo negalimybę. Ir iš tikrųjų, jei tokie reiškiniai, kaip $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$, $a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$, yra elementariai nenubrėžiami, tai juo labiau yra nenubrėžiami reiškiniai $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} = \sqrt[\infty]{1+\sqrt{-1}}$ ir $(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} = \sqrt[\infty]{1-\sqrt{-1}}$.

Wronskio raštuose (75) formula turi pirmutinį daugiklį ne 2, bet 4. Šis skirtumas nesudaro klaidos del to, kad pas Wronskį π reiškia santykį ratlankio su stipinu, o ne su skersmeniu, kaip nūn priimta. Taigi ir nenuostabu, kad Wronskio π yra dukart didesnis. Mes gi, laikydamies nūn visų matematikų priimto π apibrėžimo, turėjom Wronskio formuloj daugiklį 4 pakeisti 2.

Form. (75) gavo Wronskis dėstydamas savo originalę logaritmų teoriją. Bet tos formulos tikrumas pigu įrodyti ir be logaritmų. Reikia tik reiškiniai $A_m = (1+i)^{\frac{1}{m}}$ ir $B_m = (1-i)^{\frac{1}{m}}$ išrutuloti Newton'o binomu ir, prileidus tuose išrutulojimuose $m = \infty$, paimti skirtumas $A_\infty - B_\infty$.

Algebriškasis laikotarpis.

Įrodymas π iracionalumo.

Pertraukę nesibaigiamai tęsiamąjį skaidinį:

$$x = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \dots}} \qquad (76)$$

po 2, 3, 4... dalinio vardiklio a_2, a_3. a_4..., gausime apytikres nesibaigiamai tęsiamojo skaidinio (76) vertes. Pažymėkim jas paprastais skaidiniais:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \dots\dots, \text{ taip kad}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = a_1, \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{b_1}{a_2}, \frac{p_3}{q_3} = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3}},$$

$$\frac{p_4}{q_4} = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4}}}$$

Is čia pigiai gausime

$p_1 = a_1$,

$p_2 = a_1 a_2 + b_1$,

$p_3 = a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2 = p_2 a_3 + a_1 b_2$,

$p_4 = a_1 . a_2 a_3 a_4 + a_3 b_1 a_4 + a_1 b_2 a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3$

$= (a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2) a_4 + (a_1 a_2 + b_1) b_3$

$= p_3 a_4 + p_2 b_3$,

. . . .

$q_1 = 1$

$q_2 = a_2$

$q_3 = a_2 a_3 + b_2 = q_2 a_3 + b_2$

$q_4 = a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + b_3 = (a_2 a_3 + b_2) a_4 + b_3 =$

$= q_3 a_4 + b_3$,

. . . .

Kaip pigu matyti, pirmutinė apytikrė vertė $a_1 < x$, antroji $> x$, trečioji $< x$ ir tt. Imdami paeiliui dviejų apytikrių verčių skirtumus rasime:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{b_1}{a_2}; \quad \frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)}$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} = -\frac{b_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)(a_2 a_3 a_4 + a_2 b_2 + a_2 b_3)} \text{ ir tt...}$$

Iš čia, dėstydami tas lygybes, gausime tęsiamajam skaidiniui šią eilę:

$$x = a_1 + \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)} +$$

$$+ \frac{a_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)(a_2 a_3 a_4 + a_2 b_2 + a_2 b_3)} - \dots \qquad (77)$$

Jei tęsiamasis skaidinys turi galuotą dalinių skaidinių skaičių, tai (77) eilė bus galuota; jei tęsiamasis skaidinys yr nesibaigiamas, tai (77) eilė bus nesibaigiama.

Pasigaudami (77) eilės galime kiekvieną nesibaigiamą eilę tipo:

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \dots \qquad (78)$$

paversti nesibaigiamu tęsiamuoju skaidiniu, nes lygindami abiejų eilių (77) ir (78) narius gauname:

$b_1 = b_3 = b_3 \dots = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = A$, $A(Aa_3 + 1) = B$, $B(Ba_4 + 1) = C$ ir tt....

Iš čia randame:

$$a_2 = A, \quad a_3 = \frac{B - A}{A^2}, \quad a_4 = \frac{C - B}{B^2} \text{ ir tt....}$$

Tuo būdu (78) eilė galima pakeisti tęsiamuoju skaidiniu:

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{(B-A) + \cfrac{B^2}{(C-B) + \cfrac{C^2}{(D-C) + \dots}}}} \qquad (79)$$

Pritaikindami tą išrutulojimą Leibnizo eilei

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

kur $A = 1$, $B = 3$, $C = 5$, $D = 7 \dots$

gausime šį nesibaigiamai tęsiamąjį skaidinį:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2\ldots}}}}} \qquad (80)$$

Jį atvertus gaunama augščiau minėtasis Brouncker'o skaidinys:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}$$

Wronskis yr išradęs kitą daug tinkamesnį dydžiui π apskaityti tęsiamąjį skaidinį:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cfrac{5^2}{11+\ldots}}}}}} \qquad (81)$$

Visi tie skaidiniai, kaip matom, nesibaigiamai besitęsdami, turi begalinį narių skaičių; dėliai to $\frac{\pi}{4}$ ir $\frac{4}{\pi}$ *privalom laikyti iracionaliais dydžiais.* Nes jei $\frac{\pi}{4}$ ar $\frac{4}{\pi}$ būtų racionalūs, tuomet jiems atatinkamieji skaidiniai būtų beturį tam tikrą *paskutinį narį.* Bet jie to nario neturi.

Toliau Lambertas yr įrodęs, kad kokio nors racionalio skaidinio $\frac{m}{n}$ tangensas, būdamas išrutulotas šiuo tęsiamuoju nesibaigiamu skaidiniu:

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n}=\cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\ldots}}}} \qquad (82)$$

yra iracionalis. Jei lygybėj (82) padėsim $m=x$, $n=1$,

tai bus:

$$\operatorname{tg}x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}} \qquad (83)$$

Prie $x=\pi$ iš (83) gausime:

$$0=\cfrac{\pi}{1-\cfrac{\pi^2}{3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\ldots}}}} \qquad (84)$$

o iš čia

$$3=\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\ldots}} \qquad (85)$$

nes (84) lygybė tegalima tik prie sąlygos

$$0=3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\ldots}};$$

tai tik sąlygai esant, (84) lygybė tevirsta tapatybe:

$$0=\cfrac{\pi}{1-\cfrac{\pi^2}{0}}=\frac{\pi}{1-\infty}=0.$$

Nūn leiskim, kad $\pi^2=\frac{m}{n}$ racionaliam skaidiniui; tuomet iš (85) gautumėm:

$$3=\cfrac{m}{5n-\cfrac{m}{7-\cfrac{m}{9-\ldots}}}$$

bet dėliai to, kas augščiau buvo pasakyta, tai yra negalimas dalykas.

Tuo būdu prieita išvada, kad ne tik π, bet ir π^2 yra iracionaliai dydžiai. Klausime, ar ratilo kvadratūra, pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės, yra galima, tuo padaryta žymus žingsnis pirmyn, kad ir neigiamąja prasme. Nes nubrėžimas kai kurių iracionalių dydžių, pav., kvadratinių šaknų skriestuvu ir liniuote, kad ir yra galimas, tačiau tikimybė, kad ratilo kvadratūra tais elementariais pabūklais yra negalima, laikyta beveik lygi su tikrenybe. Pas daugelį matematikų jau senai buvo susidaręs įsitikinimas, kad π yra transcendentis skaičius. Euleris jau 1785 m. yra rašęs: „Atrodo gana pamatuota pažiūra, kad ratilo ratlankis [1]) reiškia ypatingą transcendenčių dydžių rūšį, kurie su jokiais kitais dydžiais, ar tai šakniniais ar transcendenčiais, nesiduoda lyginti." O Legendre'as, baigdamas savo 1794 m. išleistą to klausimo tyrinėjimą, yra išsitaręs: „Labai panašu į tiesą, kad skaičius π yra nesurandamas algebrinių iracionalumų srity, t. y., kad jis nėra algebrinio galuotu laipsniu ir racionaliais koeficientais lyginio šaknis. Bet šis teigimas atrodo esąs labai sunkiai įrodomas."

Galutinas šio klausimo išgvaldymas.

Legendre'o tik ką paminėtieji žodžiai pasirodė pranašingi. Praėjo beveik ištisas šimtmetis, kol π transcendentumas buvo griežtai įrodytas. Tam įrodymui padėjo pamatą *Hermite'as*, įrodęs 1873 m, kad natūralių logaritmų pagrindas e yra transcendentis skaičius. Šis įrodymas rėmės tam tikrų apibrėžtų integralų santykiais. Naudodamasis Hermite'o metodu, vokietis *Lindemann'as* 1882 m. yr įrodęs, kad ir π *yra transcendentis skaičius. Weierstrass'ui* ir *Hilbertui* kiek vėliau pavyko Lindemann'o

[1]) Ratile stipinu $= 1$ ratlankio ilgis yra $= 2\pi$.

įrodymai žymiai suprastinti. *Hurwitz'as*, *Gordon'as* ir *Vahlen'as* tą suprastinimą yra dar toliau pastūmėję, taip kad dabar, būdamas nebereikalingas integralio skaičiavimo, jis yra virtęs elementariu.

Kalbamojo įrodymo pagrindas glūdi Eulero formuloje

$$e^{ix} = cosx + isinx \qquad (86)$$

nurodančioje sąryšį tarp eksponencialės funkcijos e^x, trigonometrijos funkcijų *sinx*, *cosx* ir menamojo dydžio $i = \sqrt{-1}$.

Padėję (86) form. π vieton x ir žinodami, kad $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, gausime nuostabią lygybę:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (87)$$

Traukdami iš abiejų (87) lygybės pusių kvadratinę šaknį, prieisime naują lygybę:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i \qquad (88)$$

kurios abi pusi keldami laipsnin — i, rasime

$$e^{\frac{\pi}{2}} = i^{-i} \qquad (89)$$

Logaritmuodami natūraliais logaritmais lygybę (88) arba (89) prieisime garsiąją Bernoulli'o formulą:

$$\pi = \frac{2\,li}{i} = -2\,i\,li \qquad (90)$$

Iš (87) lygybės gaunam lyginį:

$$1 + e^{i\pi} = 0 \qquad (91)$$

kurs yra atskiras žygis bendresnio dvinario Hermite'o-Lindemann'o lyginio:

$$a\,e^{\alpha} = c.$$

Šis savo ruožtu yra atskiras žygis dar bendresnio Lindemann'o lyginio

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} + \ldots a_r e^{\alpha_r} = 0 \quad (92)$$

Tyrinėdamas šį lyginį Lindemann'as yr priėjęs ir įrodęs šią garsią teoremą: *jei e paverčia... lyginį (92) tapatybe, tai visi jo koeficientai* $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ *ir visi laipsnių rodikliai* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ *negali būti algebriniai skaičiai.* Tos teoremos įrodymas, kad ir elementaris, yra gana ilgokas, tatai mes jo čia ir nedėsime [1]). Mūsų tikslui užteks pažymėjus vien, kad (91) lyginy

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

e, kaip augščiau esam matę, tikrai paverčia jį tapatybe. Bet jo koeficientai yra algebriniai skaičiai, tatai laipsnio rodiklis $i\pi$, negalėdamas būti algebrinis, bus transcendentis, o per tai ir π bus irgi transcendentis dydis.

Lindemann'o teorema ne tik duoda π transcendentumo įrodymą, bet veda dar ir į ratilo kvadratūros klausimo apibendrinimą. Nes paėmę Lindemann'inį lyginį:

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} = 0$$

ir padėję jame: $a_1 = i$, $a_2 = -i$, $a_3 = a$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\alpha_1 = \frac{ix}{2}$, $\alpha_3 = 0$, gausime iš jo šį naują:

$$i\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) + a = 0 \quad (93)$$

algebriniais koeficientais, taigi su transcendenčiu x. Bet

1) Kas norėtų su juo susipažinti, tepaskaito *F. Kleino* lekcijas apie kai kuriuos elementarės geometrijos klausimus (Leçons sur certaines questions de Géométrie élementaire, trad.fr. par *J. Griers.* Paris, Nony 1896, p. 82—91).

kadangi $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$, tat $e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} = 2i \sin\frac{x}{2}$.

Įstatydami antrąją pastarojo lyginio pusę (93) lyginin, paversime jį šiuo nauju:

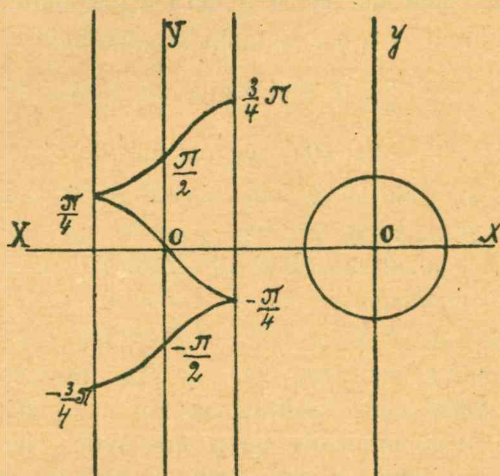
$$-2 \sin\frac{x}{2} + a = 0, \text{ arba } 2 \sin\frac{x}{2} = a \qquad (94),$$

kuris parodo, kad skaičiai x ir a negali būti drauge algebriniais skaičiais, jei tik x nėra lygus nuliui.

Ratile stipinu = 1, paėmę lanką x, galėsime jo chordą išreikšti per $2 \sin\frac{x}{2}$, o atatinkamą tam lankui ratilo išpjovą per $\frac{x}{2}$. Bet (94) lyginys nurodo, kad *ratilo lankas, kurio chorda turi algebriškai išreiškiamą ilgį, negalima geometrišku brėžimu paversti tiesiąja, pasigaunant net algebrinių kreivųjų linijų bei paviršių, o taipogi ir atatinkamoji tam lankui ratilo išpjova negalima panašiu brėžimu paversti kvadratu.*

Lindemann'o teorema, kad π yra transcendentis skaičius, teikia ratilo kvadratūros kur kas platesnį išgvaldymą, negu pradžioje buvo nustatyta. Nūn mes galime toliau žengti ir tarti: Ratilo kvadratūra yra negalima nubrėžti ne vien elementariu būdu, pasigaunant skriestuvo ir liniuotės, bet ir naudojantis algebrinėmis kreivomis ir algebriniais kreivais paviršiais. Nes nubrėžimas, kurį vykdant vartojama kreivosios algebrinės linijos ar algebriniai kreivi paviršiai, visados veda į tam tikrą augštesniais laipsniais lyginių eilę, kurių nubrėžimo rezultatas visados pasirodys esąs algebrinis dydis. Taigi tuo brėžimu nėra jokios galimybės gauti transcendentis dydis. Jis tegalima prieiti vartojant vien transcendenčias kreivąsias, k. š. augščiau minėtąją

Dinostrato kvadratrisę. Keblumas buvo tik tas, kad nei Dinostratas nei kiti matematikai nesugebėjo jos mechanišku nepertraukiamu judėjimu nubrėžti. Bet praeitame amžiuje ir šis uždavinys lenkų inžinieriaus *Abdank-Abakanovičiaus* laimingai išspręstas, pasigaunant jo išrasto pabūklo, pavadinto *integrafu*[1]). Šis



7 brėž.

pabūklas leidžia nepertraukiamu brėžimu nubrėžti integralę kreivąją $y = Fx = \int f(x)\,dx$, kai žinoma diferencialė kreivoji $y = f(x)$. Paėmus diferenciale kreivąja ratilą, išreikštą lyginiu $x^2 + y^2 = r^2$, pigu surasti atatinkamoji jai integralė kreivoji. Jos lyginys bus:

$$y = \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} \quad (95)$$

---

1) Sk. jo veikalą *Die Integraphen*. Leipzig, Teubner, 1889.

Punktai, kuriuose ji susitinka su ašimi OY, turi ordinatas: $0, \pm \frac{r^2 \pi}{2} \ldots$, o linijose ašiai OY paralėlėse, išreikštose lyginiu $x = \pm r$, susitikimo punktai bus nustatyti ordinatomis $r^2 \frac{\pi}{4}$, $r^2 \frac{3\pi}{4} \ldots$. Prie $r = 1$ tos ordinatos bus lygios π bei jo dalims (ž. 7 brėž.).

Turime čia pažymėti, kad integrafu nubrėžtosios kreivosios nėra apytikrės, bet griežtos. Tuo būdu senovės graikų idealas yra atsiektas: integralė kreivoji (95), kuri yra tam tikra kvadratrisių rūšis, nūn pigiai su integrafu nubrėžiama nepertraukiamu judėjimu, o tos transcendentės kreivosios dėka gaunama ir transcendentis dydis π.

Tuo būdu garsusis šis klausimas, kamavęs žymiausius pasaulio matematikus beveik 4 tūkstančius metų, buvo galutinai išspręstas. Mes, šios gadynės žmonės, galim dalimi didžiuotis tuo, kad ištobūlinti moderniosios matematikos metodai yr apgalėję tą problemą, kurios senesnių laikų net patys genialiausi matematikai neįstengė įveikti. Bet ir šių pastarųjų pastangos nenuėjo niekais: jų, kad ir nenusisekę, bandymai tiesė kelią per naujas mokslo sritis ir gamino naujų priemonių tikrai transcendenčio π skaičiaus esmei susekti. Tai atsiekus, garsusis klausimas susilaukė galutino griežto išsprendimo, tik kitokia prasme, negu iš pradžių tikėtasi. Tuo dar kartą pirštu prikišamai parodyta, kad matematikoj neišgvaldomų uždavinių nėra; energingai ieškant, griežtos logikos ir matematikos neatmainomų dėsnių laikantis, visada galima prieiti kiekvienos problemos išsprendimas. Matematikoj taip pat kaip ir religijoj viešpatauja principas: *ieškokite ir atrasite.*

Apytikriai π nubrėžimai.

Tuo, kas praeito straipsnio gale pasakyta, būtų galima ir baigti šis veikalėlis. Tačiau nurodę *tikrą* π nubrėžimą, negalime nepaminėti čia dar ir vieno kito žymesnio *apytikrio* π nubrėžimo. Nes tikrasai π dydis, kad ir galima nubrėžti su integrafu, bet šiam esant nepigiam, ne kiekvienas jį tegali įsigyti. Tuo tarpu skriestuvas ir liniuotė yra visiems prieinami. Taigi šiais elementariais pabūklais atsiekti π nubrėžimai kad ir nėra visai tikri, bet kaipo duodantieji dažnai ratilo kvadratūros išgvaldymą praktikoj daugiau neg užtektinu griežtumu, gali turėti moksle savo reikšmės. Pripuolamai keletą tokių apytikrių π nubrėžimų esam jau davę augščiau; čia tą patį dalyką norėtumėm naujais įdomiais pavyzdžiais ilustruoti.

Visi apytikriai π nubrėžimai remias apytikrėmis π vertėmis. Nuo Archimedo laikų žinomiausia yra $3\frac{1}{7}$. Ji bent kiek didesnė negu π. Tai žinodami, imkime eilę skaidinių $\frac{1}{7}, \frac{2}{14}, \frac{3}{21}, \frac{4}{28}$ ir tt. ir padidinkim visų vardiklius vienetu. Tuomet gausim šią apytikrių π skaidinių eilę:

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{3}{22}, \frac{4}{29}, \frac{5}{36}, \frac{6}{43}, \frac{7}{50}, \frac{8}{57}, \frac{9}{64}, \frac{10}{71}, \frac{11}{78}, \frac{12}{85}, \frac{13}{92}, \frac{14}{99}.$$
$$\frac{15}{106}, \frac{16}{113}, \frac{17}{120} \dots$$

Kaip matom, jų tarpe randas jau mums žinomieji: $\frac{1}{8}$ (Vitruvijaus), $\frac{10}{72}$ (Archimedo), $\frac{16}{113}$ (Adriano Anthoniszo bei Mecijaus), $\frac{17}{120}$ (Ptolomėjo).

Kai kurie iš jų labai lengvai nubrėžiami, pav.:

$$3\frac{5}{36} = 3{,}139\ldots = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$3\frac{9}{64} = 3{,}1406\ldots = 3 + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Nubrėžimas $3\frac{16}{112} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$ paduota žemiau (29 psl.).

Lengvai nubrėžiami ir šie iracionaliai apytikriai π dydžiai:

$$\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1463\ldots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 3{,}14142\ldots$$

$$\pi = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5}) = 3{,}14164\ldots$$

$$\pi = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = 3{,}1546\ldots$$

$$\pi = \sqrt{51} - 4 = 3{,}14141\ldots$$

Iš apytikrių π nubrėžimų, turinčių didesnį griežtumą, pažymėsime čia šiuos.

1. Lenko jezuito *Adomo Kochanskio* paskelbtas 1682 m. Jis pasižymi tuo, kad yra padaromas vienu skriestuvo prakėtimu. Būdas, kuriuo tai atsiekiama, yra šis. Iš skersmens AB galų nuleidžiama perpendikularai Aa, Ab, ir OD (ž. 8 brėž.). Atrėžiame BC = =3r = 3. Iš punkto D stipinu OD perkertam ratlankį punkte E. Jungiame punktus O ir E tiesiąja OE, kuri, būdama prailginta, susitiks su tiesiąja Aa punkte G. Tiesioji GC, jungianti punktus G ir C, ir bus apytikriai lygi π. Nes nuleidę iš punkto G perpendikularą GF ir iš A tiesiąją $AK \perp OG$, turėsime:

$$BF^2 = AG^2 = OG^2 - AO^2 = OG^2 - 1$$

Iš stačiatrikampio OAG gausime:

$$OA^2 = OG \cdot OL = 1, \text{ iš kur } OG = \frac{1}{OL}$$

Bet $OL = \sqrt{AO^2 - AL^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nes AL kaipo

$\sin 30° = \frac{1}{2}$. Todel $OG = \frac{1}{OL} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Įstatę tą reikšmę pirmon lygybėn vieton OG gausime:

$$BF = AG = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pagalios iš stačiatrikampio GFC turime:

$$GC^2 = GF^2 + FC^2 = AB^2 + (CB - BF)^2$$

iš kur $GC = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3{,}141533\ldots$ Vadinas, tuo brėžimu padarytoji klaida bus mažesnė neg 0,0001 stipino dalis.

8 brėž.

Su mažomis atmainomis šis Kochanskio nubrėžimas buvo iš naujo 1797 m. paskelbtas *Mascheronio, 1835 M. Navrockio* ir k...

2. *C. G. Spechto* 1828 m. paskelbtasis nubrėžimas daroma šiuo būdu (ž. 9 brėž.). Prailginę stipiną $OH = 1$

9 brėž.

atrėžiame $OC = 2r = 2$, $CD = DE = EF = \frac{1}{5} r = \frac{1}{5}$ Prailgintame stipine OA atrėžiame $OB = AD$. Iš punkto B vedam $AG \parallel AF$. Tuomet $OG = 2\pi r = 2\pi$ ir Δ-io OAG plotas bus lygus $= \pi r^2 = \pi$. Nes iš trikampių AOF ir BOG panašumo turime:

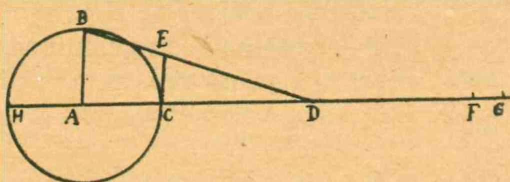
$$OG : OF = OB : OA, \text{ iš čia } OG = \frac{OF \cdot OB}{OA} =$$

$$\frac{13}{5} OB. \text{ Bet } OB = AD = \sqrt{1 + \left(2 + \frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{5}.$$

$$\text{Todel} \quad OG = \frac{13}{25} \sqrt{146} = 6{,}28318510\ldots = 2\pi.$$

Brėžimo klaida yra mažesnė negu $\frac{1}{7}$ milimetro dalis prie stipino $= 50$ metrų.

3. Dar griežtesnis yra *Pioche'o* nubrėžimas, paskelbtas 1818 m. (ž. 10 brėž.). Tesie A ratilo centras stipinu



10 brėž.

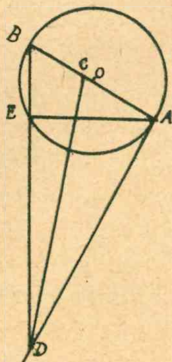
$AC = r = 1$. Brežiame $AB \perp AC$, prailginam AC atrėždami $CD = 2r = 2$. Tiesiam $CE \parallel AB$. Tesie $DF = DE$, $FG = \frac{3}{8} r = \frac{3}{8}$ ir $AH = \frac{4}{5} r = \frac{4}{5}$. Tuomet gausime:

$$HG = 2 \cdot \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 2 \cdot 3{,}14159255\ldots = 2\pi, \text{ nes}$$

$$HG = HA + AD + DF + FG = \frac{4}{5} + 3 + DF + \frac{3}{8} =$$

$= \frac{40\,DF + 167}{40}$. Bet $DE = DF = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$, nes $CE = \frac{2}{3}$. Todel galutinai gauname

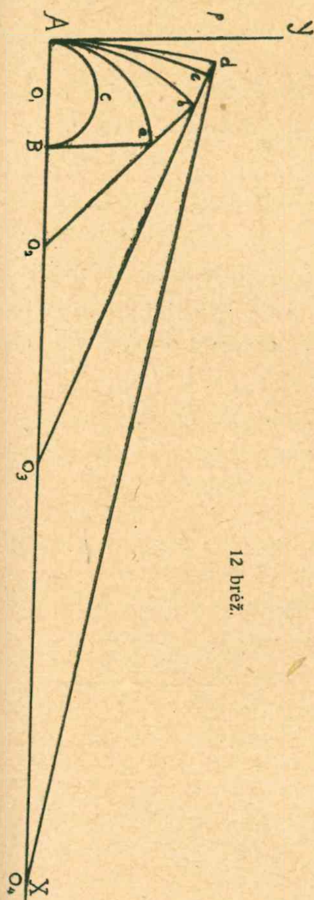
$$HG = \frac{40\,DF + 167}{40} = \frac{40 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{10} + 167}{40} = \frac{501 + 80\sqrt{10}}{120} = 2\pi .$$



11 brėž.

4. *Sonnet'o* nubrėžimas yra tuo idomus, kad duoda tiesiog lygiadydžio ratilo plotui kvadrato šoną. Jis vykdoma šiuo būdu (ž. 11 br.). Iš galinio skersmens punkto A vedama ratilo liečiamoji AD. Tesie $OC = \frac{1}{6} r = \frac{1}{6}$. Iš punkto C stipinu $= 4r = 4$ perkertama liečiamoji punkte D. Jungiame punktus D ir B tiesiąja BD, perkertančia ratlankį punkte E. Tiesioji AE, jungianti punktus A ir E, ir bus apytikris ieškomojo kvadrato šonas. Nes iš trikampių ABD ir ABE panašumo rasime: $AE : AB = AD : BD$, iš čia $AE^2 = \frac{AB^2 \cdot AD^2}{BD^2}$. Bet iš brėžimo sąlygų turime: $AB^2 = 2^2 = 4$; $AD^2 = 4^2 - \left(1\frac{1}{6}\right)^2 = 16 - \frac{49}{36} = \frac{576 - 49}{36} = \frac{527}{36}$; $BD = 2^2 + AD^2 = 4 + \frac{527}{36} = \frac{671}{36}$. Taigi $AE^2 = \frac{AB^2 \cdot AD^2}{BD^2} = 4 \cdot \frac{527}{36} : \frac{671}{36} = \frac{2108}{671} = 3{,}14157\ldots = \pi$.

5. Labai yra įdomus *Outhier'o* nubrėžimas, duodąs galimumo išreikšti ratlankį kaskart labiau atitiestais lankais



12 brėž.

ir tuo keliu vedąs ir į apytikrį π nubrėžimą. Jis įvykdoma šiuo būdu. Tesie $YAX = 90°$. Stipinu O_1A nubrėžkim pusratlankį ACB. Jo ilgiui surasti pažymėkim ašyje AX eilę punktų O_1, O_2, O_3, O_4... nustatytų santykiais:

$$AO_1 = r,\ AO_2 = 4r,\ AO_3 = 8r,\ AO_4 = 16r\ \ldots$$

Iš punkto B iškeliame perpendikularą Ba ir stipinu AB brėžiam lanką, perkertantį perpendikularą Ba punkte *a*. Iš punkto O_2 stipinu AO_2 brėžiame lanką Ab, perkertantį stipiną O_2b punkte b. Iš punkto O_3 stipinu AO_3 brėžiame lanką Ac, perkertantį stipiną O_3c punkte c. Tęsdami toliau panašius brėžimus, rasime punktus d, e, f... ir prie $AO\infty$ prieisime punktą p, kuris ir duos liniją $Ap = \pi$, nes visi lankai Aa, Ab, Ac, Ad... yra lygūs pusratlankiui $ACB = \pi$. Ir iš tikrųjų, pusratlankio ACB ilgis yra $= \frac{2\pi r}{2} = \pi r$; lanko $Aa = \frac{2\pi . 2r}{4} = \pi$, lanko $Ab = \frac{2\pi . 4r}{8} = \pi r$ ir t. t.... Tuo

būdu kiek padidėja stipinas, tiek sumažėja atatinkąs nubrėžtajam lankui kampas; pav., lankui Aa atatinka kampas $ABa = \frac{\pi}{2}$, lankui Ab atatinka kampas $AO_2b = \frac{\pi}{4}$ ir tt. Tuo būdu ir gaunam lygybių eilę $ACB = Aa = = Ab = Ac = Ad = \ldots Ap = \pi$. Iš paties brėžimo aišku, kad norint punktas *p* pasiekti, reiktų padaryti brėžimų be galo daug. To padaryti negalėdami, mes ir prieiti punktą p tegalim vien apytikriai. Griežtesni tyrinėjimai yr parodę, kad visi brėžimu gautieji punktai a, b, c, d . . . p guli tam tikroje transcendentėje kreivoje spiralių rūšies.

6. Panašus į *Outhierinį*, tik lengviau išpildomas, yra *Fontanos* nubrėžimas, paskelbtas 1784 m. Jis remias Eulero 1737 m. išrasta formula:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\ldots \quad (96)$$

Lengviausis kelias, kuriuo ji galima prieiti, yra šis: iš lygybės $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ gauname santykį

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

Dedant jin $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}\cdots$ vietoj x randama ši lygybių eilė.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}}{\frac{x}{8}}.$$

. . . .

$$\frac{\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{\frac{x}{2^{n-2}}} = \frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

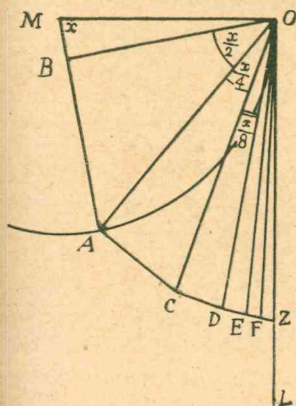
Imdami tų n lygybių padaugą, rasime

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \quad (97)$$

Bet kadangi paskutinis daugiklis, n be galo didėjant, nyksta, nes

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1$$

tatai (97) lygybė ir virsta Eulero formula (96).



13. brėž.

Jąja remiantis gaunama šis lengvas *Fontanos* nubrėžimas. Norint lanką OA, kurio centras yra punkte M, ištiesti, nuleidžiama į OM iš O perpendikularas OL ir jungiama punktai O ir A chorda OA. Kampas AOL daloma pusiau tiesiąja OC, ∠COL — tiesiąja OD ir t. t. Nūn tesie OB ⊥ MA, AC ⊥ OA, CD ⊥ OC, DE ⊥ OD ir t. t., tuomet po kelių dalymų gaunama punktas Z

kaipo paskutinio perpendikularo FZ ir OL persikirtimo punktas, kurs ir atatiks Eulero formulai (96).

Ir iš tikrųjų tesie OM = r = 1 ir $\angle$OMB = x, tuomet $\angle AOL = \angle AOB = \frac{x}{2}$, $\angle AOC = \frac{x}{4}$, $\angle COD = \frac{x}{8}$ ir t. t. Iš stačiatrikampio AOB gauname $OA = \frac{OB}{\cos\frac{x}{2}}$.

O kadangi OB = sin x, tatai $OA = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}}$. Panašiu būdu rasime

$$OC = \frac{OA}{\cos\frac{x}{4}} = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}}$$

$$OD = \frac{OC}{\cos\frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}}$$

ir galop $FZ = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots} = x.$

Pusratlankiui ištiesti ši formula netinka, nes $\sin\pi = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Tuomet imama ratilo ketvirtis, jo lankas bus $= \frac{\pi}{2}$, jam atatinkąs centralis kampas bus $= 90^0$, tuomet formula (96) virs mūsų jau augščiau minėtąja (27 psl.)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{90^0}{2}\cos\frac{90^0}{4}\cos\frac{90^0}{8}\cos\frac{90^0}{16}\cdots}$$

Ratilo kvadratūros klausimas Lietuvoje.

Negalima abejoti, kad senovėj būta ir Lietuvoj žmonių, kuriems ratilo kvadratūra rūpėjo. Bet, deja, istorijoj žinių apie juos neužsiliko. Pirmutinis lietuvis,

kurs naujesniais laikais karštai ieškojo ratilo kvadratūros, buvo vysk. *Ant. Baranauskas.* Jis 1891 m. painiais aprioriniais protavimais buvo priėjęs formulą:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2} \quad .... \quad (98)$$

ir manė radęs joje ne apytikrį, bet *griežtą* π dydį. Turėdamas tikrą senovės kvadratorių būdą, Baranauskas taip buvo įsitikinęs savo formulos griežtumu, jog rengėsi net savo išradimą išdėti tam tikroje lotynų kalba parašytoje disertacijoje, kurią, atspausdinęs, ketino nusiųsti kaipo dovaną Vatikano observatorijai, papos Leono XIII vyskupiškam jubiliejui pagerbti. Žinoma, tasai mūsų gerb. matematiko įsitikinimas buvo klaidingas. Be to, ir pati jo formula buvo jau kur kas anksčiau išrasta *Dantės* (XIV a). Kitais metais Baranauskas pats išvydo savo klaidą. Atsidėkodamas Dievui už tą išgelbėjimą iš paklydimo, jis atkalbėjo su džiaugsmu himną „Te Deum laudamus“.[1])

Pažymėję Baranausko klaidą, negalime čia nepaminėti ir teisingų jo pastabų apie skaičių π. Progos šioms pastaboms yr davęs garsusis J. H. Lamberto tyrinėjimas: „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Cirkuls suchen“. Jo pabaigoj Lamberto pažymėta „fenomenas“, apsireiškiąs šiuo būdu: dalant 1 Ludolfo skaičiaus ketvirtimi, t. y. skaidiniu

0,785 398 163 3 . . ., gaunama dalinio 1 ir išdalų
0,214 601 836 6 . . . Dalant gi tą patį daliklį
0,785 398 163 3 . . .gautomisišdalomis,t.y.skaidiniu

---

[1]) Sk. mano brošiūrą: *Vysk. A. Baranauskas, kaipo matematikas.* Kaunas, 1907.

0,214 601 836 6 . . . gaunama dalinio 3 ir išdalų 0,141 592 653 5 . . . Vadinas, prikergus prie tų išdalų skaičių 3, gaunama skaičius π. Viename savo mums rašytų laiškų Baranauskas yr išreiškęs tiesiog nustebimą, kaip rimti matematikai galį teikti skaitytojams tokių niekų. Nes faktiškai Lamberto „fenomenas" yra papraščiausia tapatybė. Ir iš tikrųjų, pažymėję pirmąsias išdalas raide *a*, antrąsias raide *b*, iš „fenomeno" sąlygų gausime:

$$\left.\begin{array}{l} 1 : \frac{\pi}{4} = 1 + a : \frac{\pi}{4} \text{ arba } 1 = \frac{\pi}{4} + a \\ \frac{\pi}{4} : a = 3 + b : a \quad \text{„} \quad \frac{\pi}{4} = 3a + b \end{array}\right\} \quad (99)$$

Iš pastarosios lygybės randame:

$$b = \frac{\pi - 12a}{4}$$

Įstatę čion reiškinį $a = \frac{4 - \pi}{4}$, gautąjį iš pirmos (99) lygybės vieton a, gausime:

$$b = \frac{\pi - 3(4 - \pi)}{4} = \pi - 3 \ldots \quad (100)$$

Štai ir visa Lamberto „fenomeno" paslaptis. Be to, Baranauskas yr dar įrodęs, kad panašius „fenomenus" gamina ne vien skaičius π, bet ir kiekvienas kitas iracionalis skaičius.

Ratilo kvadratūra rūpėjo ir šio veikalėlio autoriui. Dar gimnazijoj bebūdamas, jis su pasigėrėjimu yr skaitęs Davydovo geometrijoj paduotuosius apytikrius π nubrėžimus. Bandė ir pats naujųjų ieškoti ir du tikrai surado. Abudu juodu remias Mecijaus santykiu $\frac{355}{113}$, tiktai išreikštu šia nauja forma:

$$\pi \doteq \frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} \qquad (101)$$

Vieną iš jų čia ir paduodame. Jis vykdoma šiuo būdu (ž. 14 brėž.). Ratile skersmeniu AB punkte A brėžiame liečiamąją FD; joje atrėžiame $AC = \frac{1}{4} r = \frac{1}{4}$. Sujungę punktus O ir C tiesiąja, darome $AF = OC$. Iš punkto F stipinu, lygiu tobūlo įbrėžto trikampio šonui, perkertame diametrą AB punkte E. Iš punkto E stipinu, lygiu $= 3r = 3$, perkertame liečiamąją FD punkte D. Sujungę D ir O tiesiąja, brėžiam $OG \perp OD$ ir $GP \perp OG$. Atrėžę prailgintame diametre $BI = r = 1$, gausime $PI = \frac{355}{113} \doteq \pi$. Ir iš tikrųjų, iš stačiatrikampio GOD turime

$$AO^2 = AG \cdot AD = 1, \text{ iš kur } AG^2 = \frac{1}{AD^2}.$$

Iš stačiatrikampio OGP gauname

$$AG^2 = AP \cdot AO = AP,$$

taigi

$$AP = AG^2 = \frac{1}{AD^2}$$

Bet iš stačiatrikampio AED randame:

$$AD^2 = 3^2 - AE^2 = 3^2 - (FE^2 - AF^2)$$

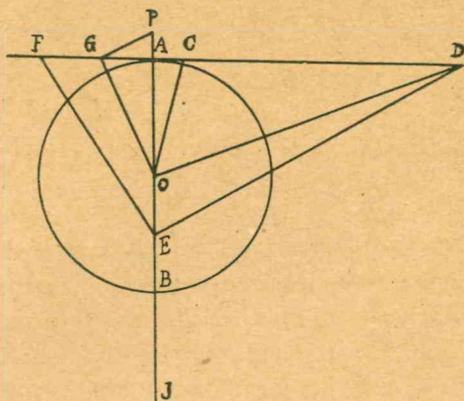
$$= 3^2 - (3 - OC^2) = 3^2 - \left[3 - \left(1 + \frac{1}{4^2}\right)\right]$$

$$= 9 - 3 + 1 + \frac{1}{16} = 7 + \frac{1}{16}$$

Taigi $AP = AG^2 = \frac{1}{AD^2} = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$

Iš čia $PI = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = \frac{355}{113} \doteq \pi$.

Antruoju panašiu brėžimu surandama ratilo plotui lygiadydžio kvadrato šonas.



14 brėž.

Tyrinėdamas 1920 m. funkcijos

$$\text{sâc}\,x = \sin x - \cos x$$

atverstinę arcsâcx ir jos diferencialą:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$$

autorius yr priėjęs naują nesibaigiamą eilę

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{5} +$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{9} + \ldots (102)$$

kurios bendras narys bus:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots\,(2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\ldots\,2(n-1)}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2n-1}$$

Ši eilė nepergreit susibėga, nes iš pirmųjų 9 jos narių tegavom vos $\pi = 3{,}1406\ldots$

Be to, esam priėję dar ir šių nesibaigiamų padaugų:

$$\frac{\pi}{5-\sqrt{5}} = \frac{5\,.\,5\,.\,5\,.\,10\,.\,10\,.\,15\,.\,15\,.\,25\,.\,25\ldots}{4\,.\,4\,.\,6\,.\,9\,.\,11\,.\,14\,.\,16\,.\,24\,.\,26\ldots} \ldots (103)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{6\cdot12\cdot12\cdot24\cdot24\cdot36\cdot36\cdot48\ldots}{1\cdot11\cdot13\cdot23\cdot25\cdot35\cdot37\cdot49\ldots}\ldots \quad (104)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{4\cdot8\cdot8\cdot16\cdot16\cdot24\cdot24\cdot32\ldots}{1\cdot7\cdot9\cdot15\cdot17\cdot23\cdot25\cdot31\ldots}\ldots \quad (105)$$

1921 gegužės 6 d. autorius yr paskelbęs atvirą laišką Lietuvos matematikams, įdėtą „Laisvės" 102 n-ry ir „Švietimo Darbo" 5—6 n-ry („Lietuva" atsisakė įdėti), prašydamas pranešti, bene turi kas iš jų naujų apytikrių elementarių ratilo kvadratūros nubrėžimų, naujų kvadratrisių bei kitokių transcendenčių kreivųjų, duodančių galimumo griežtai π nubrėžti, o taipgi naujų nesibaigiamų padaugų bei nesibaigiamų tęsiamųjų skaidinių, tinkančių dydžiui π apskaityti. Deja, į tai nieks nėra atsiliepęs.

Bendrosios pastabos.

Išdėstę ratilo kvadratūros klausimo istoriją, laikome savo pareiga pridurti dar kelias pastabas apie pačią dydžio π esmę. Kaip jau augščiau esam matę, ji apsireiškia dvejopai: arba *aritmetiškai*, kaipo tam tikras, konkretus skaičius, lygus 3 su nesibaigiama dešimtainių skaitmenų eile, arba *analitiškai*, kaipo tam tikrų matematiškų formulų rezultatas. Taigi aritmetika duoda *konkretų π dydį*, analizė — *jo genezę*.

Norėdami arčiau susipažinti su π konkrečiu dydžiu imkim jį dviem šimtais dešimtainių skaitmenų, padalinę juos eilėmis po 25 kiekvienoj. Šis π dydis atrodys šitaip:

$$\begin{aligned}\pi = 3,\,&14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\\ &83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\\ &58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\\ &20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\end{aligned} \quad (106)$$

82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196...

Ar toje didžiulėje skaitmenų krūvoje yra kokia tvarka, sunku pasakyti. Jei ta tvarka būtų ir ji pavyktų surasti, tuomet ši skaitmenų eilė būtų galima tęsti begalinai toli. Visos augščiau paduotos formulos dydžiui π apskaityti būtų nebereikalingos. Bet, deja, šiai vilčiai nėra pamato. Nes (106) lygybėj skaitmens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 kad ir pasikartoja daug sykių, tačiau nelygiai ir neregulariai, būtent: 0 — 19 kartų, 1 — 20, 2 — 24, 3 — 19, 4 — 21, 5 — 20, 6 — 16, 7 — 13, 8 — 25, 9 — 23. Skaitmens apskritai keičias, bet pasitaiko vietomis ir tas pats skaitmuo pakartotas po 2 ir po 3 sykius. Jei bandysime eilėj (106) žymėti vietas, užimamas to ar kito skaitmens, tai irgi tvarkos nerasime. Nes, pav., 1 randas 1-oj, 3, 37, 40, 49, 68, 94, 95, 110, 138-oj vietoj ir t. t.; 4 užima 2-ą, 18, 23, 36, 57, 59, 60, 70, 87, 92, 104-ą vietą ir t. t. Surišti tie skaitmens kokiu nors dėsniu neatrodo galima. Taigi visa (106) eilė atrodo chaotiška, jokiam dėsningumui nepasiduodanti.

Visai kas kita su to pat π geneze. Prisiminkim tik iš daugybės augščiau gautųjų kad ir šias formulas:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \qquad (36)$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \dots \qquad (70)$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots \qquad (71)$$

$$\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\dots \quad (72)$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\dots}{3.3.5.5.7.7.9\dots}\dots \quad (31)^1$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3.6.6.12.12.18.18\dots}{2.5.7.11.13.17.19\dots}\dots \quad (59)$$

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+}\dots}}}} \quad (80)$$

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cfrac{5^2}{11+\dots}}}}}} \quad (81)$$

Ką gi iš jų matom? Gi gražiausią tvarką, aiškiausį dėsningumą, apimantį ne vien patį π, bet ir jo laipsnius π^2, π^3, π^4 ir t. t. Visos tos taip taisyklingos formulos, kad ir nevienodą turinčios pavidalą, paduoda to paties π genezę ir rezultate veda į tą pat transcendentį, π reiškiantį, skaičių. Toji gi π genezė, kaip jau augščiau esam matę, gali apsireikšti įvairiausiose formose, įvairiausiomis nesibaigiamų eilių kombinacijomis. Taigi savo genezėje π, galima sakyti, yra įkūnytas taisyklingumas. O jau tokios formulos, kaip

$$e^{\frac{i\pi}{2}}=i,\ e^{\frac{\pi}{2}}=i^{-i},\ \pi=\frac{2\,li}{i}\ \text{arba}$$

$$\pi=\frac{2.\infty}{i}\left[(1+i)^{\frac{1}{\infty}}-(1-i)^{\frac{1}{\infty}}\right]$$

tiesiog stebina protą savo slaptingumu: kelią, vedantį į jas, mes žinom, bet jų suprasti bei jų esmę išaiš-

kinti — neįstengiam. Yra tai, galima sakyti, matematiškosios mūsų tikybos paslapčių analogijos, parodančios tiesų visai neabejotinų, bet drauge ir protui nesuprantamų, buvimą.

Galop π reiškiančio skaičiaus nedėsningumas teikia gražių analogijų ir paties regimojo pasaulio esmei geriau suprasti. Kaip žinom, šis pasaulis mūsų kūno akims apsireiškia kaipo žvaigždžių dangus. Mes jų ten matom nesuskaitomą daugybę, bet jų išdėstyme neįstengiam susekti jokios tvarkos, jokio taisyklingumo. Jos atrodo mums chaotiškai išbarstytos, jokiu dėsniu nesurištos, vienos nuo kitų nepriklausomos. Taip atrodo mūsų akims pasaulis, kaipo faktas. Bet ar mes galim tuo pliku faktu tenkintis? Mes nuo pasaulio fakto privalom eiti prie jo genezės, taip kaip nuo π skaičiaus ėjom prie jo genezės. Ši pastaroji atidengė mums π esmės gražiausį dėsningumą. Reikia tikėtis, kad pasaulio genezė atidengs mums jame dar gražesnę tvarką. Kad ta viltis turi pamato, parodė mums Koperniko ir kitų vėlesnių astronomų saulės sistemos tyrinėjimai, nurodžiusieji nuostabų joje dėsningumą. Bet saulės sistema yra tik pirmutinė pasaulio grandis. Pažinęs kitas žvaigždžių sistemas, žmogus ras jose dar daugiau puikaus taisyklingumo ir tvarkos. O kai ilgainiui bus sužinota visa pasaulio genezė, žmonija galutinai išvys, kad šis regimas dangaus kūnų išdėstyme chaotiškumas yra vien apgaulinga matomybė, slepianti puikiausią tik vien proto akims teprieinamą tvarką ir harmoniją, kurią yr nujautę ir skelbę senovės pitagoriečiai, kad ir nesugebėdami griežtai jos įrodyti.

II

Dvigubo kūbo sudarymas.

II. Dvigubo kūbo sudarymas.

Su šiuo uždaviniu yra surišta legenda: ištikus nelaimei Delo saloj (mažiausioj iš Kikladų), jos gyventojai per savo pasiuntinius teiravęsi pas Delfų orakulą, kas reikią daryti nelaimei pašalinti. Orakulas atsakęs: *reikią deliečių gerbiamojoj Apolono šventykloj esamasis kūbo pavidalu altorius padaryti dvigubai didesnis nekeičiant jo pavidalo.*[1]) Dėliai to šis uždavinys neretai ir vadinamas *Deliškiu.*

Mechaniški to uždavinio nubrėžimai.

Tarus buvusiojo altoriaus briaunos ilgį = a, uždavinio sąlygos veda į lyginį:

$$x^3 = 2\,a^3 \text{ arba } x = a\sqrt[3]{2} = a.\ 1{,}2599\ldots \qquad (1)$$

kur x reiškia naujojo altoriaus briauną. Tuo būdu *apskaitymu* uždavinys lengvai išgvaldomas norimu griežtumu. Bet senovės graikų turėta omenyje to uždavinio išgvaldymas vien geometrišku *nubrėžimu.* Čia jau pasitaiko ne viena sunkenybė.

Pirmiausia, kaip matom iš (1) lyginio, Deliškis uždavinys yra stereometriškas bei trimatis. Tuo tarpu geometriškas brėžimas tegalimas vien dvimatėje erd-

---

[1]) Kad pas senovės tautas, altorius statant, griežtai laikytasi tam tikrų taisyklių ir juos didinant, nekeista jų pavidalo, apie tai yra istorijoj likusi ne viena žinia. Plgk. *Dr. S. Günther,* Geschichte der Mathematik. I. Teil. Göschen 1908, 44 psl.

vėje, t. y. plokšty. Taigi šis stereometriškas uždavinys reikia paversti planimetrišku. Pirmutinis, kurs tai suprato, buvo *Hipokratas* iš *Chioso.*

Jis priėjo svarbų rezultatą, kad Deliškis uždavinys yra tolygus šiam: *tarp dviejų duotų tiesialinių atrėžų įterpti dvi vidurini geometrini.* Ir iš tikrųjų, paėmę du atrėžu a ir $2a$ ir pažymėję dvi vidurini geometrini raidėmis x, y, iš proporcijų

$$a : x = x : y = y : 2a \qquad (2)$$

gausime:

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax, \text{ iš kur } x^3 = 2a^3$$

Tuo būdu atrėžas x ir bus ieškomojo kūbo briauna. Bet kaip tas atrėžas nubrėžti, Hipokratas nenurodė.

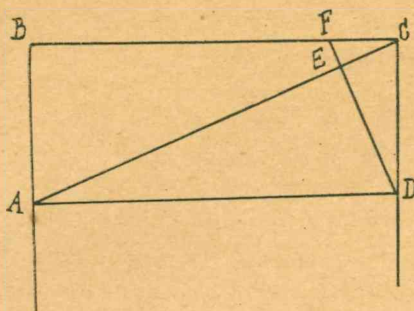
Bandydamas šį naują dviejų vidurinių geometrinių uždavinį išspręsti, garsusis Platonas yr priėjęs šį mechanišką nubrėžimą (ž. 15 brėž.):

Tesie stačiaketurkampis ABCD, kurio šonas AD galima paralėliai tai atitolinti, tai priartinti į BC. Norint dviem atrėžam AE ir EF surasti dvi vidurini geometrini, uždedama minėtasai, pusiau pastovus, pusiau judamas, stačiaketurkampis ant atrėžų AE ir EF taip, kad tiesiųjų BF ir DC persikirtimo punktas patektų tiesiosios AE prailginiman. Tuomet iš panašių stačiatrikampių ADE, DCE, CFE gaunama:

$$AE : DE = DE : CE = CE : EF.$$

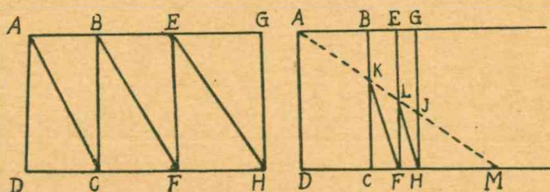
Tuo būdu DE ir CE bus dvi ieškomi vidurini geometrini, iš kurių pirmoji DE ir bus dvigubo kūbo briauna.

Platono nubrėžimą mes pavadinom *mechanišku* del to, kad jis vykdyta ne skriestuvu ir liniuote, bet atskiru augščiau aprašytu prietaisu.



15 brėž.

Kitą tam pačiam tikslui prietaisą, pavadintą *mezolabijum*, yr išradęs garsusis graikų matematikas *Eratostenas*. Jo prietaisas buvo sudarytas iš trijų stačiakampių lentelių ABCD, BEFC, EGHF (ž. 16 brėž.).



16 brėž.

Didesnysis iš dviejų atrėžų *a* identifikuota su AD, mažesnysis *b* žymėta šone GH (HJ = *b*). Lentelės taip buvo sudėstytos, kad trečioji galėjo slinkti (nuo kairės dešinėn) po antrąja, o draug su šia ir po pirmąja. Tas lentelių stūmimas tęsiasi tol, kol punktai A, J rasdavos begulį vienoj tiesiojoj su punktu L, kuriame diagonalė EH perkerta šoną EF ir su punktu K, kuriame diagonalė BF perkerta šoną BC (ž. 16 brėž.). Ir iš tikrųjų, prailginkim šią tiesiąją AKLJ; teperkerta

ji prailgintąją DH punkte M. Tuomet trikampiai HJL ir FLK, kaip aišku iš brėžinio, bus panašūs, todel iš jų ir turėsime proporciją: b : FL = HL : FK. Bet panašūs bus ir trikampiai FHL ir CFK, ir duos antrą proporciją: HL : FK = FL : CK. Iš tų dviejų proporcijų gauname naują: b : FL = FL : CK. Panašiu būdu prieinama ir kita proporcija: FL : CK = CK : a, iš kur galutinai prieinama ir proporcija dviem vidurinėm geometrinėm:

$$b : FL = FL : CK = CK : a$$

duodanti Deliškio uždavinio išgvaldymą. Eratostenas taip brangino tą savo mezolabijų, jog paaukojo jį, kaipo dovaną, šventyklai. Bet, kaip matom, ir Eratosteno nubrėžimas, kaipo vykdomas tam tikrų lentelių stūmimu, yra mechaniškas taip pat, kaip ir Platoniškis, taigi nebūdamas geometriškas, jis ir negalima laikyti griežtu Deliškio uždavinio išgvaldymu.

Griežti nubrėžimai.

1. Kaip jau iš (1) esam matę, Deliškis uždavinys pareina nuo nubrėžimo augštesnio iracionalio dydžio $\sqrt[3]{2}$. Elementariu būdu, t. y., pasigaunant vien skriestuvo ir liniuotės, jis nubrėžti negalima, nes tais dviejais prietaisais tenubrėžiamos vien kvadratinės šaknys bei jų kombinacijos, kaip tai jau esam nurodę kalbėdami apie ratilo kvadratūrą. Bet jokio kvadratinių šaknų kombinacija negali rezultate duoti kūbišką šaknį $\sqrt[3]{2}$. Taigi griežtas tos šaknies geometriškas nubrėžimas tegalimas pasigaunant vien kreivųjų linijų. Kokios kreivosios linijos tam tikslui pirmiausia tinka, tai nurodo pati (2) proporcija, jei tik joj vietoj $2a$ padėsim

bet kokį atrėžą b. Tuomet iš apibendrintos tuo būdu proporcijos:

$$a : x = x : y = y : b \qquad (2)'$$

gausime:

$$x^2 = ay, \; y^2 = bx \qquad (3)$$

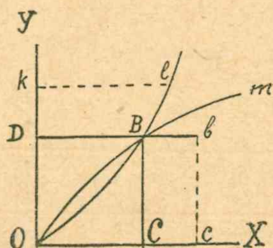
o daugindami (3) lyginiu vieną antru rasime dar

$$xy = ab \qquad (4)$$

Bet, kaip žinoma iš analitiškos geometrijos, lyginiai (3) reiškia dvi paraboli, o lyginys (4) — hiperbolę. Iš čia prieiname išvadą, kad Deliškis uždavinys geometriškai yra griežtai nubrėžiamas:

1. dviem persikertančiom parabolėm
2. persikertant parabolei su hiperbole.

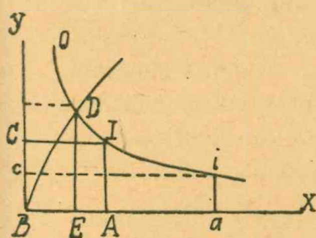
Pirmuoju būdu brėžimas vykdoma šitaip. Pasirinkus OX (ž. 17 brėž.) ašimi brėžiama parabolė OBm parametru a. OY tesie ašis antrosios parabolės parametru d. B tesie jų persikirtimo punktas. Jei BC⊥OX ir BD⊥OY, tai $BC^2 = a . OC$ ir $BD^2 = d . BC$. Iš čia $a : BC = BC : OC$; $BC : BD = BD : d$. Bet kadangi $BD = OC$, tatai galutinai gauname $a : BC = BC : OC = OC : d$.



17 brėž.

Antruoju būdu tas pat rezultatas gaunama šiuo (18) brėžimu. Tesie du duotuoju kraštutiniu atrėžu a ir d, o b ir c dvi ieškomi vidurini geometrini. Iš tos sąlygos matom, kad stačiaketurkampis $b \times c$ yra lygus pastoviam stačiaketurkampiui $a \times d$. Dėliai to ieškomieji atrėžai b ir c bus ordinatos hiperbolės ODl, gulinčios tarp asimptotų ir turinčios stačiaketurkampius

CIAB, ciaB lygius vienas antram ir stačiaketurkampiui a $\times$ d. Bet dėliai tęsiamosios proporcijos b^2 bus lygus stačiaketurkampiui a $\times$ c. Iš čia matom, kad *b* yra ordinata parabolės, turinčios parametrą *a* ir abscisą *c*. Paėmus tat BA ašimi, aišku, kad nubrėžtoji parametru a parabolė BD perkirs hiperbolę ODI ieškomam punkte D, kurs ir duos dvi vidurini geometrini ED, BE. Ir iš tikrųjų iš parabolės BD gausime santykiavimą a : ED = ED : BE. Bet tos pat linijos ED ir BE, priderėdamos hiperbolei, duos lygybę ED $\times$ BE = a $\times$ d, bei proporciją a : ED = BE : d, iš kur galutinai ir gaunama tęsiamoji proporcija a : ED = ED : BE = BE : d.

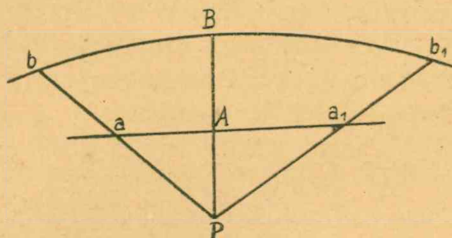


18 brėž.

Abiejų tų nubrėžimų nepatogumas yra tas, kad juose tenka brėžti po dvi kreivoji. Vėliau Dekartas, Sluzė ir k. yra tuos brėžimus suprastinę, suvesdami uždavinį į nubrėžimą vienos katros nors iš tų kreivųjų ir paprasto ratilo.

2. Be antrojo laipsnio kreivųjų, Deliškiam uždaviniui išgvaldyti išrasta ne viena augštesnioji kreivoji. Čia pirmiausia tenka paminėti *Nikomedo konchoida* (ž. 19 brėž.). Tos kreivosios yra ta ypatybė, kad jos ašis aAa_1 nuo visų tiesiųjų Pb, PB, Pb_1 . . . jungiančiųjų tos kreivosios punktus su vienu už jos pastoviu punktu P, atkerta po lygų atrėžą: ab = AB = $a_1 b_1$ . . . = = m.

Jos nepertraukiamam nubrėžimui Nikomedas turėjo išradęs tam tikrą prietaisą. Pasigaunant tos konchoidos, galima surasti dvi vidurini geometrini. Bet kadangi

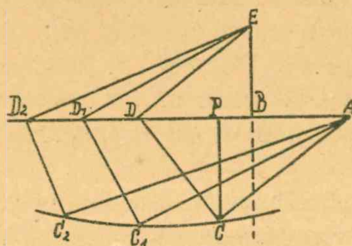


19 brėž.

Nikomedo įrodymai gana painūs, tatai jų čion ir nededame.

Apleidžiame taip pat ir kitą plačiai žinomąją kreivąją, turinčią Dioklo *kisoidos* vardą, nors ji lygiai tinka kampo trisekcijai kaip ir dviem vidurinėm geometrinėm surasti. Verčia mus tai padaryti vietos trūkumas. Jų vieton tarėmės skaitytojams būsią naudingiau nurodžius kreivąją, turinčią artimą sąryšį su augščiau išdėtu Platono nubrėžimu. Ji gaunama šiuo keliu:

3. Tesie EB⊥BA (ž. 20. brėž.). Iš punkto E išbrėžkim bet kokią palinkusiąją ED, perkertančią tiesiosios AB prailginimą punkte D. Tesie ED⊥DC. Iš punkto A nuleiskim perpendikularą AC į DC. Padarę daugiau tokių pat brėžimų, rasime ištisą punktų C, C_1, C_2 . . . eilę, sudarančią tam tikrą kreivąją. Jos lyginiui surasti nuleiskim perpendikularą PC į AB ir pažymėkim AB = a, BE = = b, AP = x, PC = y. Tuomet iš stačiatrikampių PCA ir DBE gausim:



20 brėž.

PC : AP = BE : BD arba $\frac{y}{x} = \frac{b}{BD}$; iš kur $BD = \frac{bx}{y}$. O kadangi iš stačiatrikampio DCA turim $AP \times PD = PC^2$ ir kadangi $PD = AB + BD - AP$, todel gaunam lyginį:

$$x\left(a + \frac{bx}{y} - x\right) = y^2$$

arba $$y^3 + x^2 y - axy - bx^2 = o \quad (5)$$

Punktui P sutapus su B, t. y. prie $x = a$, lyginys (5) virsta

$$y^3 = a^2 b \quad (5)'$$

kurs prie $b = 2a$ tampa identiškas lyginiui (1). Tai parodo, kad šiame atvejyje kreivoji (5) išsprendžia Delišką uždavinį, kaip tai ir matėm iš Platono nubrėžimo.

Linijos, duodančios Deliškio uždavinio išgvaldymą, vadinama *duplikatrisėmis.* Iš jų pažymėtina kubiškoji duplikatrisė, išreikšta lyginiu

$$x^3 = a(x^2 + y^2) \quad (6)$$

arba polarėse koordinatose:

$$\varrho = a \cos^{-3} \vartheta \quad (7)$$

kurs yra atskiras žygis bendresnio lyginio:

$$\varrho = a \cos^{n} \vartheta \quad (8)$$

Šis pastarasis reiškia kreivąsias, vadinamas *multiplikatrisėmis.* Jos tinka bendresniam uždaviniui išgvaldyti: *tarp dviejų atrėžų a* ir *b įterpti n vidurinių geometrinių.* Šis uždavinys, kaip tai Dekartas yr parodęs, pigiai galima išgvaldyti pasigaunant tam tikro prietaiso, sudaryto iš kampo ir atatinkamo priekampių skaičiaus[1]).

Iš apytikrių Deliškio uždavinio nubrėžimų pažymėti verta, kaipo lengviausis, *Joh. Richterio* (1537—1616), labiau žinomo iš jo lotynizuoto *Pretorijaus*

[1]) Sk. jo *Géomêtrie III*-os kn. pradžioje.

vardo. Šis matematikas pastebėjo, kad $\sqrt[3]{2}$ yra beveik lygi $\sec\frac{75^\circ}{2}$. Ir iš tikrųjų apskaitymas parodo, kad

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210$$
$$\sec\frac{75}{2} = 1{,}2599101$$

taigi paėmę $\sec\frac{75^\circ}{2}$ tepadaroma klaida vos 2′, ir gautoji tuo keliu dvigubo kūbo briauna bus apytikrė lig 0,0001[1]). Nubrėžti gi $\sec\frac{75^\circ}{2}$ geometriškai labai lengva. Tam užtenka nubrėžus 60° kampą, paimti jo pusę; atėmę ją iš 180°, gausime 180° — 30° = 150°, padalinę tą kampą pusiau, prieisime kampą 75°, paėmę jo pusę, lengvai galėsime nubrėžti ir jo sekansą.

---

[1]) Sk. *Cantor* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 2. Aufl. II. Bd., 589—590 S.

III

Kampo trisekcija

III. Kampo trisekcija.

I. Įžanga.

Aritmetikoj racionalių skaičių dalymas visada yra galimas ir lengvai įvykdomas. Paėmę dalomuoju bet kokį racionalų skaičių — teigiamąjį ar neigiamąjį, o dalikliu bet kokį kitą racionalų skaičių, visada gausime dalinį išreikštą tam tikru racionaliu skaičium. Šis dalymo rezultatas visada bus *griežtas,* jei tik dalymo veiksme nebus kokios klaidos. *Apytikriai, negriežtai* tapadalomi vien iracionaliai skaičiai.

Geometrijoj dalymas jau daug sunkiau įvykdomas. Ten net ir racionalių dydžių dalymas ne visada begalima griežtai įvykdyti. Vienatiniai geometriški griežtai tepadalomi dydžiai — yra tiesiosios linijos. Su kampais bei ratilo lankais jau yra daug sunkiau, o dar sunkiau su augštesniųjų kreivųjų lankais. Šiaipjau žiūrint — uždaviniai: padalyti duotoji tiesioji bei duotasai kampas 2, 3, 4, 5 ir tt. lygiomis dalimis atrodo vienoki ir elementariai. Iš tikrųjų gi tai toli gražu ne taip: tiesioji lengvai padaloma *bet kokiu* neskaidytu realiu skaičium, kampas lengvai tepadalomas vien *poriniais skaičiais* 2, 4, 8... 2^n; *neporiniais* gi, net ir tokiais mažais kaip 3, 5, 7 . . . jis elementariu būdu niekam nepavyko surasti. Iš tos priežasties *padalymas kampo mažiausiu neporiniu skaičium 3-mis,* arba vadinamas *kampo trisekcijos klausimas,* buvo garsus nuo amžių

šalia dviejų kitų: *ratilo kvadratūros* ir *dvigubo kūbo sudarymo* klausimų.

Tiesa, augštesnioji geometrija, pasigaudama tam tikrų kreivų linijų, visus šiuos tris klausimus senai jau yra išgvaldžiusi, bet *elementariu būdu*, t. y. pasigaunant vien *liniuotės* ir *skriestuvo*, tepavyko jie tik *apytikriai* išgvaldyti.

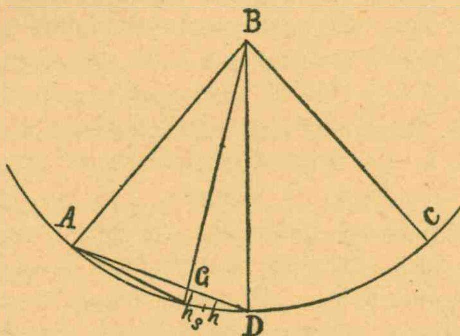
Bepradedantiems matematikos mokytis tai labai keista atrodo: „Kodel gi toks iš pažiūros lengvas uždavinys, kaip padalymas bet kokio kampo trimis lygiomis dalimis, nesiduoda elementariai išgvaldyti? Argi jau jis iš tikrųjų būtų neišgvaldomas? Įsitikinkim asmeniškai ir pabandykim, ar nepavyks tas išgvaldymas mums išrasti; būtų čia juk iš to nemaža garbės"!.. Taip mano sau ne vienas, augštesnės matematikos nestudijavęs, na, ir ima trisekcijos išgvaldymo ieškoti, pasigaudami vien ratilo ir liniuotės. Jo esu ieškojęs ir aš pats gimnazijoj būdamas. Netrūksta panašių ieškotojų ir tarp suaugusių matematikos mėgėjų: mokytojų, technikų ir k.. Iš po jų plunksnos išeina neretai brošiūros triumfo įvardinimais „Griežtas kampo trisekcijos išgvaldymas elementariu būdu" bei kitais panašiais. Keletas jų teko ir man skaityti. Paduoti jose kampo trisekcijos metodai esti dažnai labai painūs, taip kad jų klaida susekti nelengva. Bet arčiau ištyrus, pasirodė visi jie teduodą vien *apytikrį* trisekcijos uždavinio išgvaldymą, o *ne griežtą*, kaip tai patys skaitytojai gali įsitikinti iš žemiau dedamųjų pavyzdžių.

II. Apytikriai nubrėžimai.

1. Pirmutinis panašus kampo trisekcijos išgvaldymas, su kuriuo mums teko susidurti, pridera lenkui

Skąpskiui. Jį man yr nurodęs Kaune 1918 m. mirusis lenkas inžinierius J. Wojciechowskis. Skąpskio išmanymu, bet koks kampas „griežtai“ yra padalomas 3-mis lygiomis dalimis šitokiu būdu (žiūr. 21 brėž.):

Duotasai kampas ABC $= \varphi$ daloma pusiau stipinu BD; jungiama punktas A su D tiesiąja AD, kuri daloma 3-mis lygiomis dalimis; stipinu $= \frac{2}{3}$ AD iš punkto A atkertama lankas Ah_s; tuo būdu chorda $Ah_s = \frac{2}{3}$ AD. Lankas Ah_s, anot Skąpskio, ir būsiąs lygiai trečia dalis



21 brėž.

lanko AC, taip kad sujungus punktą B su h_s, susidarąs kampas $ABh_s = \frac{ABC}{3}$.

Tą savo išradimą Skąpskis taip brangino, jog net pasiskubino oficialiai apipatentuoti Leipzigiškiame „Išradimų Biūre“, kaipo griežtą kampo trisekcijos išgvaldymą. Deja, tokiu jis nėra, kaip tai pigu įrodyti.

Tam tikslui tesie Ah lygiai trečia dalis lanko Ac. Sujungę punktus A ir h chorda, rasime, kad jos ilgis, tarus stipiną AB = 1, bus galima išreikšti lygybe:

$Ah = 2 \sin \frac{\varphi}{6}$. Skąpskio gi brėžimu gautosios chordos Ah_s ilgis bus $= \frac{4}{3} \sin \frac{\varphi}{4}$. Jei tos chordos būtų lygios, tai ir jiems atatinkantieji lankai $\smile Ah$ ir $\smile Ah_s$ būtų lygūs. Bet iš tikrųjų tarp lankų Ah ir Ah_s yra skirtumo:

$$\eta = \smile Ah - \smile Ah_s =$$

$$= 2 \arcsin \frac{\varphi}{6} - 2 \arcsin \left(\frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{4}\right) \ldots \quad (1),$$

pareinančio nuo atatinkančių tiem lankam chordų skirtumo:

$$\varepsilon = Ah - Ah_s = 2 \sin \frac{\varphi}{6} - \frac{4}{3} \sin \frac{\varphi}{4} = \frac{6 \sin \frac{\varphi}{6} - 4 \sin \frac{\varphi}{4}}{3} \ldots (1)'$$

Norėdami sužinoti, kada pastarasis skirtumas dingsta, tarkime jį esant lygų nuliui. Tuomet iš (1') gausim lyginį:

$$3 \sin \frac{\varphi}{6} - 2 \sin \frac{\varphi}{4} = 0 \ldots \quad (2)$$

Padėję šiame lyginy φ vietoj 4α, gausime:

$$3 \sin \frac{2\alpha}{3} - 2 \sin \alpha = 0 \ldots \quad (2)'$$

Pridavę šiam pastarajam lyginiui pavidalą:

$$3 \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) - 2 \sin \left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = 0$$

ir išreiškę $\sin \frac{2\alpha}{3}$ ir $\cos \frac{2\alpha}{3}$ to kampo pusės funkcijomis $\sin \frac{\alpha}{3}$ ir $\cos \frac{\alpha}{3}$, gausime galop kvadratinį lyginį:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4} = 0 \ldots \quad (2)''$$

iš kur rasime:

$$\cos \frac{\alpha}{3} = 1 \text{ ir } \cos \frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Iš tų gi lygybių gauname:

$$\frac{\alpha}{3} = 2k\pi \text{ ir } \frac{\alpha}{3} = 104^0\ 28'\ 40'',96$$

Tai reiškia, kad

$$\alpha = 2.3k\pi \text{ ir } \alpha = 313^0\ 26'\ 2'',88$$

kur *k* reiškia bet kokį neskaidytą realų skaičių arba nulį. O kadangi $\varphi = 4\alpha$, tat φ dydžiui gausime šias reikšmes:

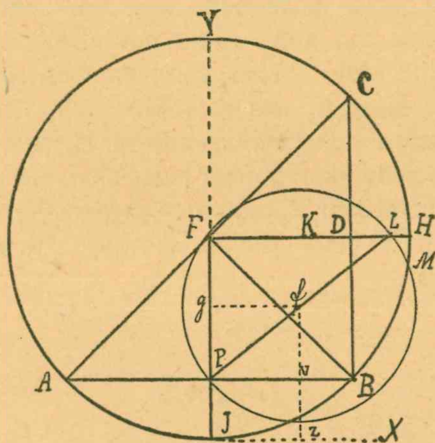
$$\varphi = 2.3.4k.\pi \text{ ir } \varphi = 1253^0\ 44'\ 11'',52.$$

Iš čia matome, kad Skąpskio brėžimu padarytoji klaida ε nyksta virsdama nuliu tiktai kampuose 0^0, $1253^0 44' 11'',52$ ir 2160^0, kur baigias jos ciklius, pasikartojąs, kampui didėjant, ir toliau, sinusoidos būdu. Būtent, toji klaida kampuose nuo 0^0 lig 900^0 didėja nuo 0 lig 1,9427, kampuose nuo 900^0 lig $1253^0 44' 11'',52$ ji mažėja nuo 1,9427 lig 0, kampuose nuo $1253^0 44' 11'',52$ lig 1440^0 ji virsta neigiamu dydžiu augdama nuo 0 lig — 1,7321; nuo čia vėl ima mažėti ir prie 2160^0 ji pasiekia nulį. Toliau ji iš naujo ima augti lig 3060^0 ir tt. Tai parodo, kad Skąpskio brėžimu padarytoji klaida gan greit auga; pav., prie $\varphi = 270^0$ lankas Ahs sudaro jau nebe $\frac{1}{3}$ lanko AC dalį, tik $\frac{1}{4}$. Bet ir kampuose $< 90^0$ klaida, kad ir nepertdidelė, visgi tikrai yra. Tai parodo (1) ir (1)' formulos. Vadinas, Skąpskio išgvaldymas yra ne griežtas, tik apytikris.

2. Tas pat pasakytina ir apie ruso *D. I. Viskovatovo* kampo trisekcijos išgvaldymą [1].) Autoriaus išmanymu, kampo trisekcija atsiekiama šiuo brėžimu (ž. 22 brėž.):

[1]) Sk. *D. I. Viskovatov.* Točnoje delenije ugla na tri časti po pravilam načalnoi geometrii. S. P. B. 1882.

Bet kokiu stipinu nubrėžtame ratile tiesiama diametras AC ir iš centro F tiesioji FB, sudaranti su FC kampą BFC $= \alpha$, kuris reikia padalinti 3-mis dalimis. C ir B punktai jungiama tiesiąja BC, į kurią iš punkto F brėžiama perpendikularas FD, daląs kampą α ir tiesiąją BC pusiau punkte D; lankas BC punkte H tąja pat tiesiąja taipgi lieka pusiau padalytas. Be to, A ir B punktai jungiama tiesiąja AB, į kurią nuleidžiama perpendikularas FJ, perkertąs tiesiąją AB punkte P ir lanką AB punkte J. Punktas P tiesiąja PL jungiama su punktu L gaunamu dalant atrėžą DH pusiau. Iš vidurio PL stipinu fL $=$ fP brėžiama ratilas, perkertąs duotąjį ratilą punkte M. To punkto nustatytas lankas BM ir būsiąs lanko BC trečdalis (ž. 22 brėž.).



22 brėž.

Jei šis brėžimas duotų griežtą kampo trisekcijos išgvaldymą, tai jis tiktų visiems kampams, bent nuo O lig π. Bet pigu įsitikinti, jį tokiu nesant. Ir iš tikrųjų

iš 22 brėž. matom, kad kampui BFC $= \alpha$ didėjant atatrėžas FD mažės, o DH — didės; tuo būdu punktas D artinsis į F, o L į stipino FH vidurį K. Tuo pat laiku, kampui AFB mažėjant, atrėžas FP didės ir punktas P artinsis į J. Prie $\alpha = 180°$ punktas L sutaps su K, o P su J. Sujungę juodu tiesiąja JK ir nubrėžę stipinu $\frac{JK}{2}$ ratilą, rastumėm irgi punktą M, nustatantį lanką JM, kurs turėtų būti lygus pusratlankio trečdaliui; bet jis iš tikrųjų čia tokiu nebus, kaip tai kiekvienas lengvai gal įsitikinti asmeniškai brėždamas. Tai dalimi pripažįsta ir pats Viskovatovas, nes pusratlankio trisekcijai yra priverstas savo kalbamąjį brėžimą modifikuoti. Bet jei šis brėžimas netinka lankui $= \pi$, tai jis negali tikti ir kampams, mažesniems neg 180°, nes jei čia viskas pareina nuo antro ratilo nubrėžimo, tai lengva įrodyti, kad to ratilo centras, kampams nepertraukiamai mažėjant ar didėjant, nedaro jokių šuolių, bet slenka nepertraukiamai nubrėždamas antrojo laipsnio kreivąją. Tam įrodyti padarykim punktą J stačiakampių koodinatų pradžia ir nuleiskim iš punkto f perpendikularus fg ir fz į FJ ir JX. Tesie $Jz = x$, $fz = y$. Tuomet iš 22 brėž. rasime:

$$FD = \cos\frac{\alpha}{2};\ DH = 1 - \cos\frac{\alpha}{2};$$

$$FL = \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2}}{2};$$

$$FP = \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2};\ PL =$$

$$\sqrt{\left[\frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2}}{2}\right]^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5 + 2\cos\frac{\alpha}{2} - 3\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

$$Pf = \frac{\sqrt{5 + 2\cos\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{2\alpha}{2}}}{4};$$

$$Pg = \frac{FP}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2};\ PJ = 1 - \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$fv = y - PJ = y - 1 + \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Tai žinodami iš stačiatrikampio Pfv gauname:

$$x^2 + \left(y - 1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5 + 2\cos\frac{\alpha}{2} - 3\cos^2\frac{\alpha}{2}}{16} \dots \quad (3)$$

$$\text{Bet } x = Pv = fg = \frac{FL}{2} = \frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2}}{4};$$

$$fv = y - 1 + \sin\frac{\alpha}{2} = Pg = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2};\ \text{iš čia randame:}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 4x - 1;\ \sin\frac{\alpha}{2} = 2(1 - y).$$

Įstatydami tuos reiškinius (3) lyginin vieton $\cos\frac{\alpha}{2}$ ir $\sin\frac{\alpha}{2}$ gausim:

$$x^2 + (1 - y)^2 = \frac{5 + 2(4x - 1) - 3(4x - 1)^2}{16}$$

iš kur galutinai rasime ir geometriškosios punkto f vietos lyginį

$$(1 - y)^2 = 2x(1 - 2x) \dots \quad (4)$$

arba $$y = 1 \mp \sqrt{2x(1 - 2x)} \dots \quad (4)'$$

Pastarasis parodo, kad antrojo ratilo centras f, kintant kampams, slenka *ratilu,* turinčiu centrą stipine FH, liečiančiu ašį JY punkte F ir nubrėžtu stipinu $= \frac{FH}{4}$.

Tuo būdu, jei kampo trisekcijos išgvaldymas pareitų nuo antrojo ratilo nubrėžimo Viskovatovo nurodytu

keliu, tai remiantis tik ką įrodytu nepertraukiamu centro f slinkimu, būtų galima ir pusratlankio trisekcija. Bet jos negalimumas Viskovatovo brėžimu pigu įrodyti paprastu apskaitymu.

Tam tikslui tesie lankas JHY $= \pi$ su centru punkte F. Perpendikularą FH dalinam pusiau; imam punktą K taip, kad $FK = KH = \frac{FH}{2}$ (ž. 23 brėž.). Jungiam K su J tiesiąja JK ir iš jos vidurio f stipinu $\frac{JK}{2}$ brėžiam ratilą, perkertantį duotąjį ratilą punkte M. Jei punktas M nustatytų lanką $JM = \frac{JHY}{3}$, tai chorda JM būtų lygi stipinui FJ. Nūn pažiūrėkim, koks gi jos tikras dydis. Tam tikslui tesie $JM = x$, $KM = y$. Sujunkim H ir M, F ir M, J ir H tiesiomis $HM = z$, JM ir JH. Tuo būdu gausim du keturkampiu JFKM ir JKHM. Remdamiesi žinomąja teorema, kad iškiluose keturkampiuose priešingų šonų padaugų suma yra lygi diagonalių padaugui, gausime dvi lygybi:

$$\left.\begin{aligned} FK \cdot JM + FJ \cdot KM &= FM \cdot JK \\ KH \cdot JM + JK \cdot HM &= KM \cdot JH \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (5)$$

23 brėž.

Bet kadangi 23 brėž. parodo, kad FK $= \frac{FH}{2} = \frac{1}{2}$, JM $= x$, FJ $= 1$, KM $= y$, FM $= 1$, KJ $= \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; KH $= \frac{1}{2}$, HM $= z$, JH $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, tatai gautosios dvi lygybės virsta lyginiais:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}.x + 1.y = 1.\frac{\sqrt{5}}{2} & \text{arba } x + 2y = \sqrt{5} \\ \frac{1}{2}.x + \frac{\sqrt{5}}{2}.z = \sqrt{2}.y & \quad " \quad x + \sqrt{5}.z = 2\sqrt{2}.y \end{array}\right\} \ldots \quad (5)'$$

Pažymėję kampą HFM $= \varphi$ ir žinodami, kad kampas HJM, kaipo dvigubai mažesnis, bus $\frac{\varphi}{2}$, iš trikampių HFM ir HJM rasime:

$$HM^2 = z^2 = 1 + 1 - 2.1.1.\cos\varphi$$

arba $$z^2 = 2 - 2\cos\varphi \ldots \quad (6)$$

$$HM^2 = z^2 = (\sqrt{2})^2 + x^2 - 2\sqrt{2}.x\cos\frac{\varphi}{2}$$

arba $$z^2 = 2 + x^2 - 2\sqrt{2}.x\cos\frac{\varphi}{2} \ldots \quad (6)'$$

Iš čia turėsime:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{2-z^2}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2+x^2-z^2}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

Bet kadangi $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$ arba $\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$, tai iš (7) gausim:

$$\frac{2-z^2}{2} = \frac{(2+x^2-z^2)^2}{4} - 1$$

arba $$2(2-z^2) = (2+x^2-z^2)^2 - 4$$

iš kur galutinai rasim

$$z^2 = 1 + x^2 \mp \sqrt{5-2x^2} \ldots \quad (8)$$

Bet iš (5)[1] pašalindami y randame:

$$z = \frac{\sqrt{10} - (\sqrt{2}+1)x}{\sqrt{5}} \ldots \quad (9)$$

Taigi galop iš (8) ir (9) gausim lyginį:

$$1 + x^2 \mp \sqrt{5 - 2x^2} = \frac{[\sqrt{10} - (\sqrt{2}+1)x]^2}{5} \ldots \quad (10)$$

iš kurio galėsime surasti ir tikrą chordos JM $= x$ dydį. Jei Viskovatovo metodas būtų griežtas, tai chorda JM turėtų būti lygi stipinui $= 1$ ir lyg. (10) prie $x = 1$ turėtų virsti tapatybe. Bet taip nėra, nes prileidę (10) lyginy $x = 1$ randam reiškinį:

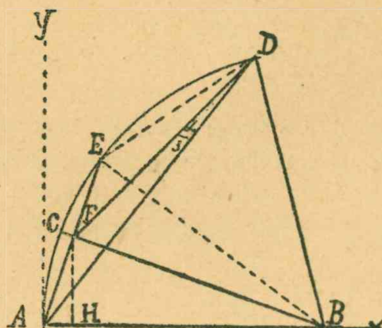
$$2\sqrt{10}(\sqrt{2} + 1) = 3 + 2\sqrt{2} \pm 5\sqrt{3} \ldots \quad (10)'$$

kuris ne tik nėra tapatybe, bet nesudaro nei griežtos lygybės, nes jo pirmoji pusė yra = 15,269, o antroji, imant ją su ženklu + yra = 14,489. Tai parodo, kad Viskovatovo brėžimas duoda kampo trisekcijos išgvaldymą ne griežtą, tik apytikrį.

3. 1908 metais Kazaniuj rusų matematikas *Ochitovičius* yr išleidęs veikalą: „Геометрія круга. Рѣшеніе проблемы о геометрическом раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя". Taikindamas įvairiems elementarės geometrijos klausimams savo naują teoriją, autorius 103—104 psl. paduoda ir trisekcijos išgvaldymą net keliais būdais. Iš jų mes tepažymėsime čia tris, laikomus autoriaus griežtais.

I. Pirmasis remias šiuo brėžimu (ž. 24 brėž.): iš viršūnės B duotojo kampo ABC $= \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, kaipo iš centro, brėžiame bet kokiuo stipinu AB lanką AD. Tesie jame lankas CD $= 3$ AC ir AE $= 2$ AC. Punktus D ir E jungiame tiesiąja su punktu A. Tiesiosios BC ir AE tepersikerta punkte F. Jungiame F su D. Tuomet

kampas FDA, Ochitovičiaus išmanymu, ir būsiąs $= \frac{\alpha}{3}$.
Vadinas, trisekcijos išgvaldymas pareitų čia nuo elementario suradimo punkto F. Tas punktas, kintant



24 brėž.

kampui, keis savo vietą. Pažiūrėkim, kokia gi yra geometriškoji to punkto F vieta.

Tam tikslui imkim punktą A koordinatų pradžia. Tesie $AH = x$, $FH = y$. Tuomet iš stačiatrikampio FHB gausime: $y^2 = FB^2 - (AB - AH)^2 = FB^2 - (r - x)^2$, iš kur

$$FB^2 = y^2 + (r - x)^2 \ldots \qquad (11)$$

Iš kitos šalies iš to pat stačiatrikampio randame:

$$y = (r - x) \operatorname{tang} \alpha \ldots \qquad (12)$$

iš kur gauname

$$\cos \alpha = \frac{r - x}{\sqrt{y^2 + (r - x)^2}} \ldots \qquad (13)$$

Bet iš stačiatrikampio EFB randame:

$$FB = EB \cos \alpha = r \cos \alpha = \frac{r(r - x)}{\sqrt{y^2 + (r - x)^2}} \ldots \qquad (14)$$

Tat iš (11), (13) ir (14) galutinai gauname lyginį:

$$y^2 + (r - x)^2 = \frac{r^2 (r - x)^2}{y^2 + (r - x)^2}$$

arba $$y^2 + (r - x)^2 = r (r - x),$$

iš kur galutinai

$$y^2 = x (r - x) \ldots \qquad (15)$$

Vadinas, geometriškoji punkto F vieta yra ratilas nubrėžtas stipinu $= \frac{r}{2}$.

Ši aplinkybė dar aiškiau parodo Ochitovičiaus brėžimą esant paremtą ratilais ir tiesiomis, ir todel, kaipo elementarį, negalint būti griežtą. Jį tikrai tokį esant parodo ir kampo FDA apskaitymas. Tai atsiekiama šiuo būdu:

Iš trikampio FDA turime:

$$AF^2 = FD^2 + AD^2 - 2\,FD \cdot AD \cos FDA \ldots \qquad (16)$$

iš kur, pažymėję kampą $FDA = \varphi$, gausime

$$\cos \varphi = \frac{FD^2 + AD^2 - AF^2}{2\,FD \,.\, AD} \ldots \qquad (17)$$

Bet $FD^2 = EF^2 + ED^2 - 2\,EF \cdot ED \cos FED$;
$EF = r \sin \alpha$; $ED = 2 r \sin \alpha$; $\angle FED = \angle FEB + \angle BED = 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° - 2\alpha$; iš čia $\cos FED = \cos (180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$; tuo būdu galutinai randame:

$$FD^2 = r^2 \sin^2 \alpha + 4 r^2 \sin^2 \alpha + 4 r^2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha = r^2 \sin^2 \alpha (5 + 4 \cos 2\alpha) = r^2 \sin^2 \alpha (1 + 8 \cos^2 \alpha);$$

$$AD = 2 r \sin 2\alpha; \quad AF = r \sin \alpha.$$

Įstatydami tuos reiškinius vietoj FD, AD, AF (17) lygybėn, gausime:

$$\cos \varphi = \frac{r^2 \sin^2 \alpha (5 + 4 \cos 2\alpha) + 4 r^2 \sin^2 2\alpha - r^2 \sin^2 \alpha}{4 r^2 \sin \alpha \sin 2\alpha \sqrt{5 + 4 \cos 2\alpha}} =$$

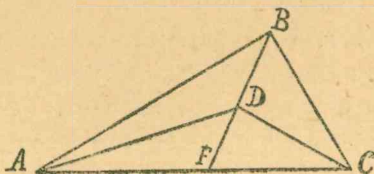
$$= \frac{3 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}} \ldots \qquad (18)$$

Jei $\cos\varphi$ iš (18) būtų lygus $= \cos\frac{\alpha}{3}$, tai reiškinys (18) būtų lyginio $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} \ldots$ (19) šaknis, ir todel būdama įstatyta (19) lyginin vieton $\cos\frac{\alpha}{3}$, paverstų abi jo pusi tapatybe. Tuo tarpu, padarę tą įstatymą, gaunam formulą:

$$(1 + 8\cos^2\alpha)^3 = 9^2(4\cos^2\alpha - 1)^2 \ldots \quad (20)$$

kuri virsta tapatybe tik prie $\alpha = 2k\pi$ (k = 0, 1, 2, 3...); prie kampų gi $\alpha > 0$ ir $\alpha < 2k\pi$ ji daros nelygybe, tai didesne, tai mažesne, žiūrint kampo α didumo. Ochitovičius pripažįsta savo brėžimą tikru irgi vien kampuose nuo 0 lig $\frac{90^0}{4} = \frac{\pi}{8} = 22^0\ 30'$. Bet įstačius (20) formulon $\cos 15^0$ ar $\cos 20^0$ vieton $\cos\alpha$, pigu įsitikinti, k[illegible] (20) form. nevirsta tapatybe ir $\cos\varphi$ iš (18) form. n[illegible] a [illegible]žtai lygus $\cos\frac{\alpha}{3}$. Tarp $\cos\varphi$ ir $\cos\frac{\alpha}{3}$ vis[illegible] tikras skirtumas, parodąs klaidą, atsiranč[illegible] ampo trisekciją Ochitovičiaus nurodytu brėži[illegible]. O kadangi šis brėžimas Ochitovičiaus yra išvestas iš tam tikrų teoremų eilės, tat ir tos teoremos, jei ne visos, tai bent viena kita turi būti klaidingos.

II. Antras Ochitovičiaus kampo trisekcijos išgvaldymas vykdomas šiuo būdu: Turint kampą BAC $= \alpha \leq \frac{90^0}{4}$ ir kampą BCA $= 3\alpha$, sudaroma betkoks trikampis ABC. Iš kampo B viršūnės (25 brėž.) brėžiama tiesioji BF, dalanti kampą B pusiau, ir pamate AC

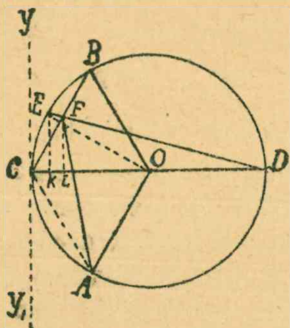


25 brėž.

prie punkto C sudaroma kampas ACD = BAC = α. Šio kampo šonas teperkerta BF punkte D. Sujungę punktus A ir D tiesiąja AD, gausim kampą DAF, kurs, Ochitovičiaus išmanymu, būsiąs $= \frac{BAC}{3} = \frac{\alpha}{3}$.

Kadangi čia sąlygos tos pat, kaip ir pirmam brėžime, ir visas antras brėžimas paremtas tomis pat teoremomis, kaip ir pirmasis, tai šiam esant negriežtam, negali būti griežtas ir antrasis.

III. Trečias kampo trisekcijos išgvaldymas, Ochitovičiaus ypatingai branginamas ir todel jo pavadintas „universaliu", remias šiuo brėžimu: duotasai kampas AOB = φ (ž. 26 brėž.) daloma pusiau stipinu CO, kuris prailginama lig persikirtimo su ratilu, nubrėžtu iš punkto O stipinu = 1. Tesie šio ratilo ir prailginto stipino CO persikirtimo punktas D. Jungiama punktai C ir B chorda CB. Daloma lankas CB pusiau punkte E. Jungiama punktas E su D. Tiesiosios CB ir ED tepersikerta punkte F. Jungiama punktas F su A. Tuomet kampas CFA, Ochitovičiaus išmanymu, ir būsiąs kampo AOB lygiai trečia dalis.



26 brėž.

Šis brėžimas įdomus tuo, kad jis duodas visiems kampams ribose tarp 0° ir 360° pritaikinti ir veda į įdomią 3-jo laipsnio kreivąją, gaunamą ieškant geometriškosios augščiau gautojo punkto F vietos. Jos lyginiui surasti iš punktų F ir E (ž. 26 brėž.) nuleiskim į CD perpendikularus EK ir FL. Tesie punkte C koordinatų pradžia. Punkto F

koordinatas CL ir FL pažymėkim paprastais simboliais x, y. Tuomet iš trikampių FLD ir EKD gausime:

$$\frac{FD}{FL} = \frac{ED}{EK} \ldots \qquad (21)$$

Bet $FD = \sqrt{FL^2 + LD^2} = \sqrt{y^2 + (2 - x)^2}$; $FL = y$; $ED = 2 \sin\left(90° - \frac{\varphi}{8}\right) = 2 \cos \frac{\varphi}{8}$; $EK = \sin \frac{\varphi}{4}$.

Įstatę tuos reiškinius (21) lygybėn, gausime:

$$\frac{\sqrt{y^2 + (2 - x)^2}}{y} = \frac{2 \cos \frac{\varphi}{8}}{\sin \frac{\varphi}{4}} = \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{8} =$$

$$= \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{\text{[illegible]}}} \ldots \qquad (22)$$

Bet iš trikampio CFL ran[illegible]

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(90° - \frac{\varphi}{4}\right) \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}g^2 \frac{\varphi}{8} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{8}} \ldots \qquad (23)$$

Dabar belieka iš lyginių (22) ir (23) pašalinti kampinis dydis $\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{8}$. Tam tikslui, radę iš (22), kad

$$\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{8} = \frac{2 - x}{y},$$

įstatykim šį reiškinį (23) lyginin, tuomet gausim:

$$\frac{y}{x} = \frac{(2 - x)^2 - y^2}{2y(2 - x)},$$

iš kur galutinai rasim:

$$y = \pm (2 - x) \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \ldots \qquad (24)$$

Kaip matom, geometriškoji punkto F vieta yra 3-jo laipsnio kreivoji strofoidų rūšies, perkertanti tiesiąją CD punktuose C ir D ir turinti asimptotą nustatytą lygybę $x = 4$ ir todel paralelę ašiai YY'.

Čia kįla klausimas, bene bus tik ši kreivoji tikra trisektrisė, panaši į kitas trisektrises, kurių ne viena taipgi yra 3-jo laipsnio kreivoji. Norėdami gauti tikrą atsaką į šį klausimą, apskaitykim kampo CFA dydį. Tam tikslui iš trikampio AFC turime:

$$AC^2 = CF^2 + AF^2 - 2\ CF \cdot AF \cdot \cos AFC.$$

Tarę $\angle AFC = \psi$, iš tos lygybės gausim

$$\cos \psi = \frac{CF^2 + AF^2 - AC^2}{2\ CF \cdot AF} \dots \qquad (25)$$

Iš to gi pat trikampio AFC turime:

$$AF^2 = CF^2 + AC^2 - 2\ CF \cdot AC \cos ACF.$$

Bet $\cos ACF = \cos (OCB + OCA) =$

$$= \cos \left(90 - \frac{\alpha}{4} + 90 - \frac{\alpha}{4}\right) = -\cos \frac{\alpha}{2};\ \text{todel}$$

$$AF^2 = CF^2 + AC^2 + 2\ CF \cdot AC \cos \frac{\alpha}{2} \dots \qquad (26)$$

Įstatydami tą reiškinį (25) lygybėn, gausime:

$$\cos \psi = \frac{CF^2 + CF \,.\, AC \cos \frac{\alpha}{2}}{CF \,.\, AF} =$$

$$= \frac{CF + AC \cos \frac{\alpha}{2}}{AF} \dots\dots\dots \qquad (27)$$

Bet $AC = 2 \sin \frac{\alpha}{4}$. Šonui gi CF surasti iš trikampio DFL turime:

$$y = (2 - x) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8} \dots \qquad (28)$$

o iš trikampio CFL gauname:

$$y = CF \cos \frac{\alpha}{4};\ x = CF \sin \frac{\alpha}{4}.$$

Įstatydami (28) lyginin vieton x, y jiems atatinkančius augščiau gautuosius dydžius, rasime:

$$CF \cos\frac{\alpha}{4} = \left(2 - CF \sin\frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}, \text{ iškur —}$$

$$CF = \frac{2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{8}} =$$

$$= \frac{2 \sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8} + \sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}} = \frac{2 \sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8}\right)} = 2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

Įstatydami (26) lyginin vieton CF ir AC jiems atatinkančius dydžius, rasim:

$$AF = \sqrt{4 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{8} + 4 \sin^2\frac{\alpha}{4} + 8 \sin\frac{\alpha}{4} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{8} \cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{8} \sqrt{1 + 4 \cos^2\frac{\alpha}{8} \cos\frac{\alpha}{2} + 4 \cos^4\frac{\alpha}{8}}.$$

Taigi galutinai iš (27) gauname:

$$\cos\psi = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{8} + 2 \sin\frac{\alpha}{4} \cos\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{8} \sqrt{1 + 4 \cos^2\frac{\alpha}{8} \cos\frac{\alpha}{2} + 4 \cos^4\frac{\alpha}{8}}} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cos^2\frac{\alpha}{8} \cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + 4 \cos^2\frac{\alpha}{8} \cos\frac{\alpha}{2} + 4 \cos^4\frac{\alpha}{8}}} \ldots \quad (29)$$

Jei Ochitovičiaus „universalis“ brėžimas duotų griežtą kampo trisekciją, tai $\cos\psi$ būtų griežtai lygus $\cos\frac{\alpha}{3}$. Bet iš (29) pigu įsitikinti, kad ši formula duoda griežtą kampo trisekciją tik prie $\alpha = 0$, nes

tuomet iš (29) gaunam: $\cos \psi = \frac{3}{3} = 1$, iš kur $\psi = 0$; vadinas, ji griežta, kada nėra ko dalyti. Prie $\alpha = 360°$ iš jos gaunam $\cos \psi = \frac{0}{0}$; tuo rezultatu irgi negalima pasidžiaugti. Kampuose didesniuose neg 0 ir mažesniuose neg 360° $\cos \psi$, kaip pigu įsitikinti apskaitymu, niekad nebūna lygus $\cos \frac{\varphi}{3}$; tarp jų visados esama skirtumo $\cos \psi - \cos \frac{\varphi}{3} = \varepsilon$, kurs ir reikš klaidą, padaromą dalant kampą Ochitovičiaus išgirtuoju universaliu brėžimu. Apskritai tarus, ta klaida ε neperdidelė, bet ji, didėjant kampui, didėja, ir kampuose tarp 330° — 360° gali siekti net kelių gradų.

Iš tos priežasties ir augščiau (24) gautoji kreivoji

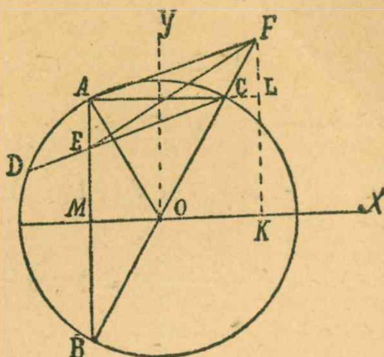
$$y = \pm (2 - x) \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \qquad (24)$$

yra trisektrisė *ne griežta*, bet tik *apytikrė*.

IV. *Apytikrės trisektrisės.* Tikrų trisektrisių mokslas žino gana daug. Apie apytikres trisektrises, panašias į (24), matematikų raštuose mums neteko skaityti. *A priori* galima spėti, kad jų esama taip pat daug, kaip ir tikrųjų. Apytikrės trisektrisės reikia laikyti apytikrių kampo trisekcijos nubrėžimų padariniais.

Norėdami surasti antrą apytikrę trisektrisę, mes pabandėm ištirti dar vieną to pat A. Ochitovičiaus trisekcijos nubrėžimą, paduotą jo veikalo 112 psl. Jis vykdomas šitaip: iš duotojo kampo AOB $= \alpha$ viršūnės (27 brėž.), kaipo iš centro, tam tikru stipinu OA $= 1$ brėžiama ratilas, kurs duotojo kampo šonus teperkerta punktuose A ir B, o prailgintąjį stipiną BO punkte C.

Nuo punkto A atkertame lanką $AD = \frac{AB}{4}$ ir vedame chordą DC, kuri perkirs chordą AB punkte E. Šiame sudarom kampą $CEF = \angle ACE = \frac{\alpha}{8}$. To kampo šonas teperkerta prailgintą stipiną OC punkte F. Sujungę punktus A ir F, gausime kampą AFB, kurs, Ochitovičiaus išmanymu, ir bus kampo AOB trečia dalis.



27 brėž.

Kintant kampo $AOB = \alpha$ dydžiui, aišku, jog keisis draug ir punkto F padėjimas. Geometriškoji to punkto vieta sudarys tam tikrą kreivąją. Pažiūrėkim, kaip ji atrodys. Tam tikslui nuleiskim iš punkto F perpendikularą FK. Tesie $FK = y$, $OK = x$, $OF = \sqrt{x^2 + y^2}$. Prailginkim AC lig persikertant su FK punkte L. Tesie kampas $AFC = \psi$. Tuomet trikampio AFC plotas bus galima išreikšti dvejopu būdu ir gauti lyginys:

$$\frac{AF \cdot FC \sin \psi}{2} = \frac{AC \cdot FL}{2}. \tag{30}$$

Bet kadangi $\angle ECF = 180° - \frac{3\alpha}{8}$, $\angle CEF = \angle ACE = \frac{\alpha}{8}$, $\angle EFC = 180° - 180° + \frac{3\alpha}{8} - \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{4}$; o be to,

$$AC = 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \; EC = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{8}}, \text{ tai turėsime}$$

$$\frac{FC}{EC}=\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{8}};\ \text{iš kur } FC=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{8}};$$

iš trikampio gi AOF turime: $\frac{AF}{AO}=\frac{\sin\alpha}{\sin\psi}=AF$; galop

$FL=y-\sin\frac{\alpha}{2}$; todel iš (30) gausime lyginį:

$$\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{8}}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(y-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

arba

$$\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{8}\left(y-\sin\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (30)'$$

O kadangi $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha=$

$=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\cos\frac{\alpha}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{2\sqrt{x^2+y^2}}}}$, tai

iš (30)′ galutinai gausime ieškomosios kreivosios lyginį:

$$8x^2=\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2\times$$
$$\times\left(\sqrt{2\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2. \qquad (31)$$

Dabar pažiūrėkim, koks yra tikras kampo AFC $=\psi$ dydis. Tam tikslui iš trikampio AOF turime:

$$\frac{OF}{AO}=OF=\frac{\sin(\alpha-\psi)}{\sin\psi}, \qquad (32)$$

iš kur gauname:

$$CF=OF-1=\frac{\sin(\alpha-\psi)-\sin\psi}{\sin\psi}. \qquad (33)$$

Bet CF, kaip augščiau esam matę, yra $= \dfrac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{8}}$,

todel iš (33) gauname lyginį:

$$\frac{\sin(\alpha - \psi) - \sin \psi}{\sin \psi} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{8}}. \qquad (34)$$

Išrutuloję $\sin(\alpha - \psi)$ ir padarę atatinkamus perkeitimus lyginy (34), galutinai gausime:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{8}}{1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{8}} \cdots \qquad (35)$$

o iš čia rasime ir

$$\cos \psi = \frac{1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{8}}{\sqrt{1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{8} + 4 \cos^4 \frac{\alpha}{8}}} \cdots \qquad (36)$$

Iš (36) matom, kad kampo ψ dydis, brėžiant jį augščiau nurodytu *Ochitovičiaus* brėžimu, lieka tas pat, kaip ir kampo, gaunamojo „universaliu" to pat autoriaus nubrėžimu (plg (29) formulą). Taigi kampo trisekcija čia yra ne griežta, bet apytikrė, lygiai kaip ir $\cos \psi$ reiškinys (36) yra lygus $\cos \frac{\alpha}{3}$ ne griežtai, bet apytikriai.

Vadinas, ir kreivoji (31) taip pat, kaip ir (24), nėra griežta trisektrisė, tik apytikrė.

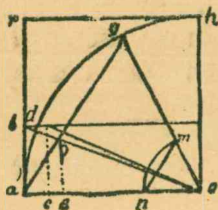
Įdomu, kad abi tos kreivosios, kad ir labai į viena antrą nepanašios, tačiau veda į tą pat rezultatą, išreikštą (29) lygybe.

Jų nepanašumas pigu išaiškinti dideliu brėžimų skirtumu. Sunkiau išaiškinti gautųjų tais įvairiais brėžimais kampų identiškumas, nors jojo tikrumu abejoti netenka.

Iš tų kampų identiškumo, remiantis vien indukcijos keliu, buvo galima spėlioti, kad ir kreivosios (24) ir (31) bus identiškos arba bent tos pat rūšies. Tuo tarpu, kaip matom, taip nėra. Taigi čia dar kartą pasirodo, kad matematikoj indukcija — yra labai netikras kelias.

Be kampų trisekcijos, *Ochitovičiaus* veikale yra paduotas ir būdas ratilo lankui bei visam ratlankiui padalinti *n* lygiomis dalimis, bet kadangi jo brėžimai remias tomis pat teoremomis, kaip ir kampų trisekcija, taigi šiai esant negriežtai, ir anie griežtais laikyti negalima. Be to, prie skaičiaus *n* bent kiek didesnio, tas kampo dalymas *Ochitovičiaus* metodu yra praktiškai beveik neįvykdomas.

4. *V. N. Grigorjevo* brėžimas. Garsusis Kauno komendantas Grigorjevas, kaip matyt iš jo prieš pat karą išleistos brošiūros[1]), yra taipgi buvęs tos nuomonės, kad jam pavykę elementariu būdu išgvaldyti kampo trisekcijos klausimą. Jo siulomas brėžimas yra šitoks (žiūr. 28 brėž.):



28 brėž.

Stipino ao trečdaliu $\left(no = \frac{ao}{3}\right)$ brėžiama duotame dalymui kampe *goa* lankas *mn*; punktai *m* ir *n* jungiama chorda *mn*; didžiojoj chordoj *ag* nuo punkto *a* atrėžiama $ap = mn = \frac{ao}{3}$; punktai *o* ir *p* jungiama tiesiąja *op* ir prailginama ji iki persikertant punkte b

---

[1]) Sk. *V. N. Grigorjev:* Vsiakij ugol možno razdielit na tri ravnyja časti. (Geometričeskim ili načertatelnym sposobom liš' pri pomošči cirkulia i lineiki). Kovno, 1914, 5 str. in-8 i 1 tablica čertežei.

su *ar* perpendikulare į *ao*. Iš punkto b tiesiama *bd* paralelė *ao*; teperkerta ji lanką *ag* punkte d. Jungdami punktus *d* ir *o* tiesiąja *od* ir gausime kampą *doa*, kurs, Grigorjevo išmanymu, ir būsiąs lygus $\frac{aog}{3}$. Nesunku įrodyti, kad tai yra netiesa.

Tam tikslui iš punktų d ir p nuleiskim perpendikularus *de* ir *pe*. Tesie kampas $aog = \alpha$, $aob = \varphi$, $aod = \psi$. Grigorjevo klaida paaiškės savaime, suradus kampo ψ dydį. Šis gi prieinama šiuo būdu: iš trikampio *aop* gauname

$$op^2 = ao^2 + ap^2 - 2ao \cdot ap \cdot \cos pao =$$

$$r^2 + \frac{4}{9} r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3} r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{9}\left(1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{nes } ao = r,\ ap = mn = \frac{2}{3} r \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\angle pao = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Iš to pat trikampio *aop* randame dar:

$$ap^2 = ao^2 + op^2 - 2ao \cdot op \cos\varphi, \text{ iš kur}$$

$$\cos\varphi = \frac{ao^2 + op - ap^2}{2ao \cdot op} =$$

$$= \frac{r^2 + \frac{r^2}{9}\left(1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{4}{9} r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2r \cdot \frac{r}{3}\sqrt{1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Toliau iš stačiatrikampių *aob* ir *cod* gaunam:

$$ab = ao \operatorname{tg}\varphi;\ cd = od \sin\psi$$

iš kur žinodami, kad $ab = cd$ ir $ao = od$, rasime

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\psi, \text{ arba } \cos^2\varphi = \frac{1}{2 - \cos^2\psi} = \frac{\left(1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + 8\cos^2\frac{a}{2}};$$

iš čia galutinai gauname

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{1+8\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \dots \qquad (37)$$

Jei ψ būtų lygus $\frac{\alpha}{3}$, tai ir skirtumas tarp

$$\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\psi = \cos\frac{\alpha}{3} - \frac{\sqrt{1+8\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon$$

būtų visada lygus nuliui. Bet iš tikrųjų jis tėra lygus nuliui tik kampuose 0° ir 90°, kituose gi visada esti $\varepsilon > 0$. Tas pat pasakytina ir apie skirtumą $\eta = \frac{\alpha}{3} - \psi$. Pav., kampe 60° η bus = 16′, kampe 120° η = 4° 44′ ir tt.

Kaip augščiau esam matę, Grigorjevo brėžimas pareina nuo punkto p nustatymo. Keičiantis dalomojo kampo α dydžiui, keis savo vietas ir punktas p. Pažiūrėkim, kokią geometriškąją vietą jis sudaro, kintant kampui α nuo 0° lig 360°. Jai surasti padarykim punktą a koordinatų pradžia. Tesie $ae = x$, $ep = y$. Tuomet iš stačiatrikampio *eop* rasime:

$$y^2 + (r-x)^2 = op^2 = \frac{r^2}{9}\left(1+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = $$

$$= \frac{r^2}{9}\left(9-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \dots \qquad (38)$$

Bet iš stačiatrikampio *aep* turime:

$$x = ap\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2r}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ iškur } \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3x}{2r}$$

Įstatę pastarąjį reiškinį vieton $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ (38), gausime geometriškosios p vietos lyginį:

$$y^2 + (r-x)^2 = \frac{r^2}{9}\left(9 - \frac{8 \cdot 3x}{2r}\right) = r^2 - \frac{12rx}{9} \text{ arba}$$

$$y^2 = \frac{x(2r-3x)}{3} \ldots \quad (39)$$

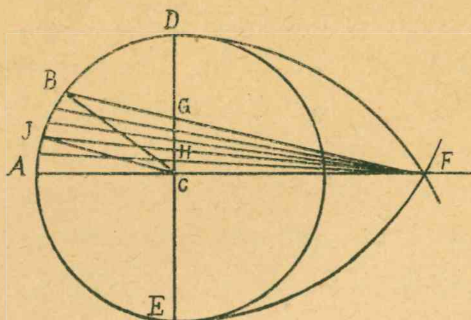
Iš čia matom, kad geometriškoji punkto p vieta yra ratilas, nubrėžtas stipinu $\frac{r}{3}$ ir liečiąs lanką *agh* punkte a.

Jei be šio nubrėžtumėm dar antrą ratilą stipinu $= \frac{2r}{3}$, liečiantį tą pat ratilą punkte a, tai tuodu ratilu visas chordas, nutiestas iš punkto *a*, ratile *agh* padalintų trimis lygiomis dalimis. Bet kampams dalinti trimis lygiomis dalimis šis brėžimas, kaip matėm, netinka, nes duoda rezultatą ne tikrą, tik vien apytikrį.

III. Apytikrė kampų polisekcija.

Metodų bet kokiam kampui *n* dalimis apytikriai padalinti yra daug ir kur kas lengvesnių, negu *Ochitovičiaus* augščiau (108 p.) paminėtasai. Porą jų tariamės būsiant ne pro šalį čia nurodžius.

1. *Fialkovskio metodas.* Tesie kampas ACB $= \alpha$. Iš kampo viršūnės C brėžiama ratilas ir jame tiesiama skersmuo DE ⊥ AC (ž. 29 brėž.). Iš punktų D ir E stipinais lygiais DE brėžiama lankai DF ir EF, kurie persikirsdami nustatys punktą F. Jungiame punktą F su B tiesiąja BF, kuri stipiną CD perkirs punkte G. Liniją CG dalinam *n* lygiomis dalimis ir tuo būdu gauname tiesioje CG eilę punktų, kuriuos jungdami su punktu F ir pratęsdami tas linijas iki persikertant su lanku AB, padalinsime tą lanką apytikriai *n* lygiomis dalimis. Ir iš



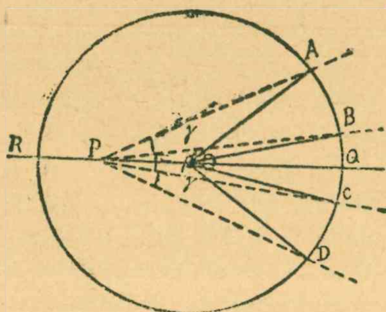
29 brėž.

tikrųjų, tesie, pav., $CH = \frac{m}{n} CG$. Tada, jei $\angle CFH = x$, $\angle JCA = \xi$, pigu gauti santykiai:

$$tgx = \frac{m \sin \alpha}{n (\sqrt{3} + \cos \alpha)} \text{ ir } \sin (\xi - x) = \sqrt{3} \sin x \quad (40),$$

iš kur lengva apskaityti ξ dydis. Pav., prie $\alpha = 40°$, $m = 1$, $n = 5$, bus $\xi = 8° \, 3,2'$ viet. $8°$, o prie $m = 4$, $n = 5$, $\xi = 32° \, 4,3'$ vietoj $32°$.

2. *Lampės metodas.* Ratile, kurio centras yra O, sudarome kampą $AOD = 2n\alpha$. To dėliai turėsime lanką AD, padalintą n lygiomis dalimis (žiūr. 30 brėž.). Tesie RQ skersmuo, daląs kampą AOD pusiau. Tuomet tarp punktų O ir R galima pasirinkti punktas P, kurį sujungus su A, B, C...D gausime n kampų. O kadangi prie OP = 0 ir OP = 1 tie kampai yra lygūs, tai kįla klau-



30 brėž.

simas, ar jie nebus bent apytikriai lygūs prie OP bet kokio. Imkim visų lengviausį atsitikimą, kuriame n = 3. Tuomet, pažymėję OP = y, o kampus APB = CPD = γ, BPC = β, iš 29 brėžinio gausime:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\alpha}{x + \cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) = \frac{\sin 3\alpha}{x + \cos 3\alpha} \qquad (41)$$

iš kur rasime:

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{4x(x^2 - 1)\sin^3\alpha}{x^4 + 4x^3\cos^3\alpha + 6x^2(2\cos^2\alpha - 1) + 4x\cos^3\alpha + 1} \qquad (42)$$

Kraštutinės tos x funkcijos vertės gaunama iš 6 laipsnio lyginio, kuris betgi galima pakeisti kvadratiniu

$$x^2 - 4x\cos\alpha + 1 = 0 \qquad (40);$$

taigi x galima iš (42) pašalinti ir galutinai gauti rezultatas:

$$\beta - \gamma = \pm \operatorname{arctg}\frac{2\sin^3\alpha}{(3 - \sin^3\alpha)\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}} =$$

$$= \pm \operatorname{arctg}\frac{2\sin\frac{7}{2}\alpha}{(3 - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin 3\alpha}} \qquad (43)$$

kuris ir bus ieškomoji kraštutinė vertė[1]. Prie kampo AOD = 90°, α = 15° didžiausis skirtumas tarp kampų β ir γ tesieks tik 24, 6′; prie kampo AOD = 45°, α = 7° 30′, to skirtumo tebus tiktai 3, 0′. Iš čia matom, kad kampai prie P labai mažai tesiskiria nuo vienas antro, taip kad praktikoj jie galima laikyti lygiais, ypač jei AOD < 90°. Tas pat pasakytina ir prie n > 3.

Ši Lampės metodo ypatybė veda į šį nubrėžimą kampui n dalimis apytikriai padalinti: brėžiama ratilas, jame imama n kartų bet koks lankas ir tuo būdu gaunama kampas AOD, padalintas n lygiomis dalimis.

---

[1]) Slg. Mitscherlingo op. c. 195 p.

Turėdami šį brėžinį ir norėdami padalinti duotąjį kampą A'P'D' n dalimis, privalome to kampo viršūnę P' slinkinti linija OR nuo O linkon R tol, kol kampo A'P'D' šonai pereis per punktus A ir D. Tuomet punktas P' atsidurs padėjime P, ir sujungę tą punktą su B, C...D gausime prie P *n* apytikriai lygių kampų. Kad tai lengviau būtų galima padaryti, kampas A'P'D' brėžiama permatomame popieryje.

Abu augščiau išdėtu (Fialkowskio ir Lampės) metodu yra geru tuo, kad lygiai tinka kampų trisekcijai, kaip ir kampams *n* dalimis apytikriai dalyti.

Be šių dviejų, yra nemaža ir kitų metodų kampų apytikrei polisekcijai ir trisekcijai, bet del vietos trūkumo juos čia apleidžiame. Kas norėtų su jais apsipažinti, tekreipias į *Mitscherlingo*[1]) ir *Fialkowskio*[2]) veikalus.

IV. Griežti nubrėžimai.

Peržiūrėję keletą negriežtų kampo trisekcijos išgvaldymų, eikim dabar į griežtuosius. Kelių, vedančių griežton trisekcijon, yra daug. Iš jų natūraliausi yra trys.

1. *Centralių kampų metodas.* Turint duotasai kampas ABC, iš jo viršūnės B bet kokiu stipinu brėžiama lankas AC ir stengiamasi jame surasti tokie du punktai D ir E, kad sujungus juodu su centru B stipinais BD ir BE gautumėm lygius kampus, t. y. kad būtų $\angle ABD = \angle DBE = EBC$.

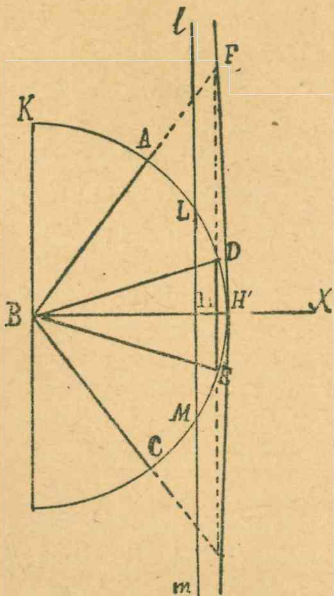
Tam tikslui reikia kampas ABC stipinu BH padalinti pusiau ir prailgintame stipine BA surasti

---

1) Das Problem der Kreisteilung, Leipzig, 1913.

2) Teilung des Winkels und Kreises, 1860.

toks punktas F, kad, nuleidus iš jo perpendikularą FE į BH, jisai atkirstų lanką DE $= \frac{AC}{3}$.



31 brėž.

Šis punktas elementariu geometrišku brėžimu surasti negalima. Bet pigu išreikšti jo geometriškoji vieta.

Tam tikslui tesie B koordinatų pradžia; BH tesie x, FH $=$ y. Iš stačiatrikampio BFH randame:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ taigi}$$

$$\cos\varphi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \dots \quad (44)$$

Iš trikampio ABD (pravedę jame chordą AD, kurios 31-me brėž. nėra), gauname: $AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\frac{\varphi}{3}$; bet kadangi AD = DE = 2DH = $= 2\sqrt{r^2 - x^2}$, tatai gauname:

$$2r^2 - 2r^2\cos\frac{\varphi}{3} = 4r^2 - 4x^2,$$

iš kur randame:

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{2x^2 - r^2}{r^2} \dots \quad (45)$$

Įstatydami gi žinomon formulon

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$$

reiškinius iš (44) ir (45) vieton $\cos\varphi$ ir $\cos\frac{\varphi}{3}$, gausime

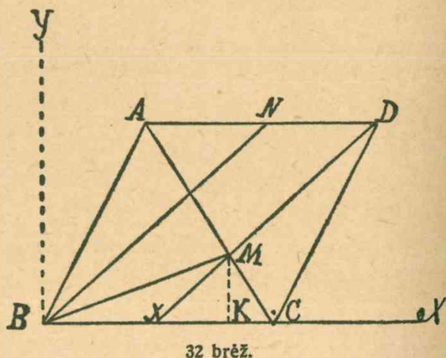
$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 4\left(\frac{2x^2 - r^2}{r^2}\right)^3 - 3\left(\frac{2x^2 - r^2}{r^2}\right), \text{ arba}$$

$$r^6 (x^2-y^2)^2=(x_2+y_2)(2r^2-x^2)[4(2x^2-r^2)^2-3r^4] \ldots (46)$$

Tuo būdu, norint padalinti kampą 3-mis lygiomis dalimis centralių kampų metodu, punktui F surasti reikia pasigauti kreivosios (46), kuri yra 8-jo laipsnio. Ji perkirs ašį BX punkte *H'* ir turės asimptota tiesiąją *lm*, gautą, darant lanką $KL = LM = \frac{\pi}{3}$. Jos dalis nurodyta 31 brėž.

Centralių kampų metodas galima ir modifikuoti, ieškant prailgintame stipine BA tokio F' punkto, kurs būdamas sujungtas su C atkirstų lanką $AD = \frac{AC}{3}$.

2. *Rombo metodas.* Norėdami juo kampą $ABC = \varphi$ dalinti 3-mis lygiomis dalimis, imame jo šonuose lygius atrėžus BA ir BC ir iš punktų A ir C vedam tiesiąsias AD, CD paraleles tiesioms BC, AB. Tos paralelės, persikirsdamos punkte D, sudarys rombą, jei kampas B bus $< 90°$ (ž. 32 brėž.). Tame rombe brėžiam diagonalę AC. Aišku savaime, kad paėmus tiesioje BC bet kokį punktą x ir sujungus jį su D, tiesioji Dx visada perkirs diagonalę AC tokiame punkte M, kad AM > MC; punktui x beeinant nuo punkto C punkto B linkon, atrėžas Bx mažės, o atrėžas Mx didės.



32 brėž.

Iš čia pigiai prieinama išvada, kad šone AC esanti kažkur tokia punkto x padėtis, kurioje $Bx = Mx$. Tarkim, kad tokia padėtis atrasta (ž. 32 brėž.); tuomet nubrėžę tiesiąją BN, paralelę Dx, o taipgi sujungę punktus B ir M, rasime, kad

$$\angle ABN = \angle NBM = \angle MBC = \angle \frac{ABC}{3}.$$

Ir iš tikrųjų, del lygybės $Bx = Mx$ trikampis BxM yra lygiašalis, todel $\angle MBC = \angle BMx$; bet $\angle BMx = \angle NBM$, nes juodu sudaryti paralelėmis linijomis BN ir Dx, taigi turime tarti kad ir $\angle MBC = \angle NBM$. Toliau $\angle ABN = \angle MDC$ del jų šonų paralelumo, o iš trikampių BMC ir MDC lygybės ($MC = MC$, $BC = DC$, $\angle MCB = MCD$) plaukia išvada, jog $\angle MDC = \angle MBC$, o iš čia galutinai randame, jog

$$ABN = \angle NBM = \angle MBC = \frac{ABC}{3}.$$

Punktas M čia taip pat yra nenubrėžiamas liniuote ir ratilu, kaip ir punktas F 31-tam brėžiny, bet jo geometriškoji vieta lengvai surandama. Tam tikslui tesie B koordinatų pradžia, $BK = x$, $MK = y$, $AB = a$;

$$\angle BAC = \angle ACD = \frac{180 - \varphi}{2} = 90 - \frac{\varphi}{2}.$$

Iš stačiatrikampio KMC randame:

$$MC^2 = y^2 + (a - x)^2 \ldots \qquad (47)$$

O iš trikampio MCD, turėdami omenyje, kad $MD = BM = \sqrt{x^2 + y^2}$, rasime

$$MD^2 = x^2 + y^2 =$$

$$y^2 + (a - x)^2 + a^2 - 2a\sqrt{y^2 + (a - x)^2} \sin\frac{\varphi}{2},$$

iš kur gauname

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{a-x}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}}\ldots \qquad (48)$$

Iš (48) randame:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{y}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}}\ldots \qquad (49)$$

O iš (48) ir (49) gauname ir

$$\cos\varphi=\frac{y^2-(a-x)^2}{y^2+(a-x)^2}\ldots \qquad (50)$$

Iš stačiatrikampio gi BMK randame

$$\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ldots \qquad (51)$$

Įstatydami reiškinius (50) ir (51) žinomojon formulon:

$$\cos\varphi=4\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}$$

vieton $\cos\varphi$ ir $\cos\frac{\varphi}{3}$ gausime lyginį:

$$\frac{y^2-(a-x)^2}{y^2+(a-x)^2}=\frac{4x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}-\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$[y^2-(a-x)^2]^2(x^2+y^2)^3=x^2(x^2-3y^2)^2[y^2+(a-x)^2]^2\ldots \qquad (52)$$

Taigi norint išgvaldyti kampo trisekcijos uždavinį, reikia mokėti nubrėžti (52) 10-jo laipsnio kreivoji. O tai yra labai nelengva.

3. *Stipino metodas.* Juo duotasai kampas $ABC=\varphi$ daloma trimis lygiomis dalimis šitaip: iš kampo ABC viršūnės bet kokiu stipinu brėžiama ratilas, perkertąs kampo šonus punktuose A ir C (žiūr. 33 br.). Stipinas BC prailginama iki jam persikertant su ratilu punkte D ir vedama chorda DL taip, kad būtų BM = ML, kur M yra chordos DL ir stipino AB persikirtimo punktas. Sujungę punktą L su B ir gausime kampą ABL =

$\angle \frac{ABC}{3}$. Ir iš tikrųjų, iš trikampių BML ir BDL matome, jog $\angle MBL = \angle MLB$ ir $\angle BDL = \angle ABL$; bet $\angle LBC = \angle BDL + \angle DLB = 2\,BDL = 2\,ABL$. Tai parodo,

33 brėž.

jog $\angle ABL$ yra $\angle ABC$ trečia dalis, taip kad pravedę stipiną BN || DL gausime tris lygius kampus: $\angle ABL$, $\angle LBN$ ir $\angle NBC$. Tuo būdu matom, jog kampo trisekcijos uždavinys pareina nuo suradimo punkto M, atatinkančio sąlygai MB=ML. Jis elementariu būdu irgi negalima surasti, nes jo geometriškoji vieta sudaro augštesnio laipsnio kreivąją. Jos lyginiui išvesti imkim punktą B koordinatų pradžia; tesie BK = x, MK = y. Tuomet iš stačiatrikampio BMK rasime:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ldots \qquad (53)$$

o iš trikampio BML gausime

$$ML^2 = BM^2 + BL^2 - 2\,BM \,.\, BL \cos \frac{\varphi}{3} =$$

$$= x^2 + y^2 + r^2 - 2r\sqrt{x^2 + y^2} \cos \frac{\varphi}{3} = x^2 + y^2 \qquad (53)'$$

nes $ML = BM = \sqrt{x^2+y^2}$. Iš (53)′ gi randame:

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{r}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ldots \quad (54)$$

Įstatydami reiškinius (53) ir (54) formulon

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}, \text{ rasime}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4r^3}{8\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{3r}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

arba

$$(x^2+y^2)(2x+3r) = r^3 \ldots \quad (55)$$

iš kur randame

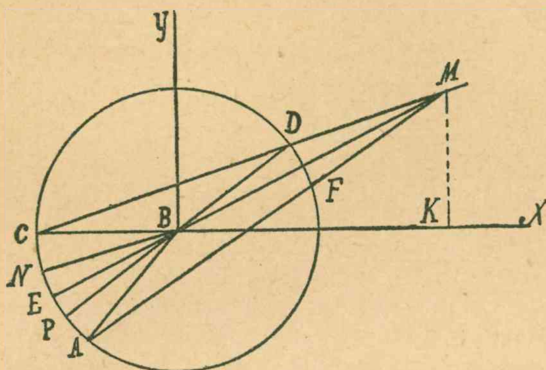
$$y = \pm\sqrt{\frac{r^3}{2x+3r} - x^2} \ldots \quad (56)$$

Ši kreivoji yra 3-jo laipsnio, perkertanti ašį BY punkte P, kurio ordinata $BP = \frac{r}{\sqrt{3}}$, ašį DX punktuose D ir R. Šio pastarojo abscisa $BR = \frac{r}{2}$. Prie $x = -\frac{3r}{2}$ kreivoji turi asimptotą EE′.

Tuo pačiu stipino metodu, tik bent kiek modifikuotu, esu bandęs gvaldyti trisekcijos uždavinį ir aš gimnazistu būdamas. Paėmęs bet kokį kampą ABC dalinau jį pusiau ir stengiaus pravesti chordą CD taip, kad jos dalis nuo punkto D lig persikertant su prailginta bisektrise punkte M būtų lygi stipinui BD (žiūr. 34 brėž.). Tuomet, pravedus NB || CM ir PB || AM, gaunama trys kampai CBN, NBP, PBA, kurie bus visi lygūs ir kurių kiekvienas bus $= \frac{ABC}{3}$.

Tuo būdu kampo trisekcijos išgvaldymas pareina nuo suradimo punkto M, kurį jungiant su punktais C

ir A, gaunama ir punktai D ir F, atatinkantieji sąlygai BD = DM = MF. Bet punktas M elementariu būdu



34 brėž.

surasti negalima, nes jo geometriškoji vieta sudaro augštesniojo laipsnio kreivąją. Jos lyginys gaunama šiuo būdu:

Tesie B koordinatų pradžia (ž. 34 brėž.), BY, BX jų ašys; BK = x, MK = y. Tuomet iš trikampio CBD gauname:

$$CD^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 4r^2 \cos^2 \frac{a}{3};$$

$$CD = 2r \cos \frac{\varphi}{3}; \; CM = CD + DM = r + 2r \cos \frac{\varphi}{3}.$$

Iš trikampio BDM randame: $DM^2 = r^2 =$

$$= r^2 + x^2 + y^2 - 2r\sqrt{x^2+y^2} \cos \frac{\varphi}{6}; \text{ iščia} \cos \frac{\varphi}{6} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2r};$$

$$\sin \frac{\varphi}{6} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}}{2r}; \; \cos \frac{\varphi}{3} = \frac{x^2 + y^2 - 2r^2}{2r^2} \quad \ldots (57)$$

O iš trikampio CMK gauname:

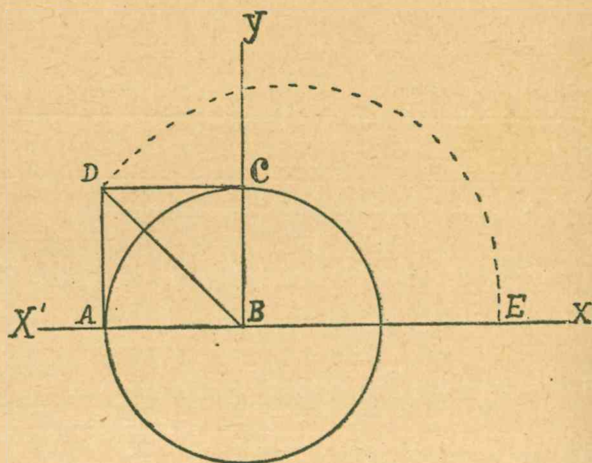
$$\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{CK}{CM}=\frac{x+r}{r+2r\cos\frac{\varphi}{3}}=$$

$$=\frac{x+r}{r+\left(\frac{x^2+y^2-2r^2}{r}\right)}=\frac{r(x+r)}{x^2+y^2-r^2}\ldots \quad (58)$$

Iš (57) ir (58) turime

$$\frac{(x^2+y^2-2r^2)}{2r^2}=\frac{r(x+r)}{x^2+y^2-r^2}$$

arba: $(x^2+y^2-2r^2)(x^2+y^2-r^2)=2r^3(x+r)$,
arba galop, $(x^2+y^2-3r^2)(x^2+y^2)=2r^3x\ldots$ (59)
Gautoji kreivoji yra 4-jo laipsnio. Jos šaka DE, tinkanti kampų nuo 0° lig 270° trisekcijai, parodyta 35 brėžiny.



35 brėž.

Kaip matome iš 35 brėž., šiuo būdu kampai griežtai padaloma trimis dalimis tik ribose nuo 0° lig 270°. Kampams > 270° šis metodas nebetinka.

Augščiau gautosios keturios trisektrisės (46), (52), (56) ir (59), kiek žinom, yra naujos, tik (55)-ios lyginys:

$$(2x + 3r)(x^2 + y^2) - r^3 = 0 \qquad (55)'$$

kad ir nėr identiškas perkeistam Maclaurin'o trisektrisės lyginiui

$$(2x - 3r)(x^2 + y^2) + r^3 = 0 \text{ [1]}, \qquad (55)''$$

bet reiškia tą pačią Maclaurin'o trisektrisę, tik atkreiptą savo kilpa dešinėn. [2]

Be augščiau nurodytųjų kreivųjų kampo trisekcijai galima vartoti Nikomedo konchoida, išreikšta lyginiu

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) - lx^2 = 0 \ldots \qquad (59)$$

kardioida

$$(x^2 + y^2 - 2ax) = 4a^2 (x^2 + y^2) \qquad (60)$$

o taipgi ir daugybė kitų kreivųjų, k. š. kvadratrisė, parabolė, hiperbolė ir t. t.

Kampams dalinti bet kokiu $2^n + 1$ neporiniu skaičium vartojama *polyodė*, išreikšta lyginiu:

$$y^2 (x^2 + y^2 - k^2) = (x^2 + y^2 - kx - 2m^2)^2 \ldots \qquad (61)$$

Būdas kampams dalinti 5, 7-mis lygiomis dalimis, pasigaunant tos rūšies kreivųjų, yra išdėtas *Gino Lorios* veikale: *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven.* Leipzig 1902, 341—343 psl.

Žinoma, kampų dalymo griežtumas, pasigaunant kreivųjų, pareina nuo jų nubrėžimo griežtumo. Faktiškai jos niekad nebūna absoliučiai griežtai nubrėžiamos.

---

[1] Slg. Dr. *H. Wieleitner.* Spezielle ebene Kurven, Leipzig, Teubner 1908, 44 psl.

[2] Slg. Dr. *H. Wieleitner,* op. c. 22 fig.

Taigi ir kampų dalymas tomis ar kitomis kreivomis būna visados tik apytikriai griežtas. Griežto kampų dalymo ieškojimas, tikrai sakant, yr patarnavęs ne tiek kampų dalymo praktikai, kiek apskritai grynajai matematikai, praskindamas jai kelią į plačią įvairių įdomių kreivųjų sritį.

V. Mechaniški nubrėžimai.

Nurodęs augščiau (II §) įvairius negriežtus kampo trisekcijos brėžimus ir parodęs (IV-me §) įvairius griežto trisekcijos išgvaldymo metodus, tariuos, būsiant ne pro šalį priminus čia *vieną sąlygą*, kurią priėmus, bendras kampo trisekcijos nubrėžimas elementariu būdu, t. y. pasigaunant vien ratilo ir liniuotės, virsta galimas. Apie tą sąlygą geometrijos vadovėliuose kažkodel nieko nesakoma, o tuo tarpu ji, mūsų išmanymu, turi nemaža svarbos trisekcijos klausime. Žodžiais ji galima išreikšti šitaip: *Kampas galima padalinti trimis lygiomis dalimis net ir elementariu būdu*, jei be *ratilo turėsime dar liniuotę su dviem jos briaunoje pažymėtais pastoviais punktais d* ir *m*. Ir iš tikrųjų, turėdami tokią liniuotę ir norėdami padalinti kampą ABC (ž. 34 brėž.) trimis dalimis, mes stipinu AB = BD = dm brėžiam ratilą, perkertantį duotojo kampo ABC šonus punktuose C ir A. Tai padarę, dedam liniuotę taip, kad jos briauna paliestų punktą C; toliau palikdami liniuotės briauną beliečiančią punktą C, stengiamės stumdami liniuotę taip pakreipti, kad du jos punktu *d* ir *m* vienas atgultų kur nors ratilo ratlanky punkte D, o kitas bisektrisėj EM punkte M. Tuo būdu gautieji punktai ir nustatys

kampą $MCB = CBN = \frac{ABC}{3}$. Tą pat padarius, ar tiesiog punktą M sujungus su A, gaunama kampas $PBA = MAB = \frac{ABC}{3}$. Ir iš tikrųjų, kadangi $DM = dm = BD$, tai pravedę tiesioms CM ir AM paraleles NB ir PB, rasime, kad $\angle NBC = \angle BCD = \angle DMF = \angle NBP = \angle \frac{ABC}{3}$.

Teoretiškai imant, toks kampo trisekcijos gvaldymas reiktų laikyti griežtu, nes jis duoda tikrai trečiąją duotojo kampo dalį; tačiau matematikai jį griežtu nelaiko del to, kad jame suradimas punktų D bei M pareina ne nuo geometriškojo brėžimo, tik nuo mechaniškojo iš akies jų nustatymo. Dėliai to šis kampo trisekcijos būdas ir neįvesta elementarėn geometrijon. Bet, mūsų išmanymu, jis nereikėtų niekinti, nes jo pasigaunant lengvai nubrėžiama net tokios trisektrisės, kurių atskiri punktai del lyginių painumo tiesioginiu apskaitymu nustatyti nėra galima.

Be liniuotės su dviem pastoviais punktais ir priekampio su pastovių pusratiliu, kampų trisekcijai yra išrasta įvairių specialių skriestuvų ir kitokių mechanizmų. Jų aprašymą skaitytojas gali rasti minėtame Mitscherlingo veikale 144—155 psl.

* * *

Tenkindamies paprastos euklidinės geometrijos sritimi, galėtumėm šiuom ir baigti trijų garsiausiųjų geometrijos klausimų gvildenimą. Bet XIX amž. šalia euklidinės išrasta dar dvi nauji neeuklidini geometrijos sistemi. Nuo išradėjų vardų jos pavadinta *Lobačevskinė - Bolyai'inė* ir *Riemanninė*. Svarbiausius tų trijų geometrijų skirtumus parodo ši lentelė:

Geometrijos sistemos	Iš punkto A į tiesiąją BC tame pat plokštų galima nutiesti paralelė	Kampų suma trikampy yra
enklidinė	tik viena	= 2 stat. kampam
Lob. Bol-nė	begalinė daugybė	< 2 stač. kampu
Riemanninė	nė vienos	> 2 stač. kampu

Iš čia kįla klausimas, kaip atrodys naujose neeuklidinėse sistemose trijų garsiausiųjų geometrijos klausimų lyginiai:

$$(1)\ x^2 = \pi r^2;\quad (2)\ x^3 = 2a^3;\quad (3)\ x^3 = \frac{3}{4}x - \frac{m}{4}.$$

Del nurodytų žymių skirtumų pačiose geometrijose galima *à priori* laukti žymių skirtumų ir tuose lyginiuose. Ir iš tikrųjų tie lyginiai Lobačevskinėj-Bolyai'inėj sistemoj turės šį pavidalą:

$$(1)'\ \mathrm{Sin}^2 x = \mathrm{Sin}\left(4\pi\,\mathrm{Sin}^2\frac{r}{2}\right)$$

$$(2)'\ \int_0^x \mathrm{X}\log\frac{1+\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\,dx = 2\int_0^a \mathrm{X}\log\frac{1+\mathrm{X}}{1+\mathrm{X}}\,dx$$

$$(3)'\ \mathrm{Sin}^3 x = \frac{3}{4}\mathrm{Sin}\,x - \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\,m$$

kur simbolis *Sin* reiškia hiperboliškąjį siną, *log* — natūralų logaritmą, o $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 x}}$.

Riemanninėj sistemoj tie lyginiai atrodys šiaip:

$$(1)''\ \sin\frac{x}{k} = \sin\left(4\pi\sin^2\frac{r}{2k}\right)$$

$$(2)''\ \int_0^x \mathrm{X}\log\frac{1+\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\,dx = 2\int_0^a \mathrm{X}\log\frac{1+\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\,dx$$

$$(3)''\ -\sin^3\frac{x}{k} = \frac{3}{4}\sin\frac{x}{k} - \frac{1}{4}\sin\frac{m}{k}$$

kur simbolis *log* reiškia natūralų logaritmą, *k* — Riemanninės geometrijos tam tikrą parametrą, o

$$X = \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x}{k}}}.$$

Visus tuos lyginius mums yra nurodęs dras *Kirilas Vörös'as*, Budapešto profesorius, už ką jam tariam čia nuoširdų ačiū.

Iš lyginių (2)′ ir (2)″ pasirodo, kad sudarymas dvigubo kubo abiejose neeuklidinėse geometrijose tebelieka neišspręstas, nes šių dienų matematika nesugeba anų dviejų lyginių griežtai integruoti. Tam integravimui yra reikalinga nauja atskira funkcija. Mūsų jauniems matematikams linkime ją surasti ir tuo būdu antrąjį garsųjį geometrijos klausimą galutinai užbaigti.

Kai del ratilo kvadratūros, tai Bolyai'is savo veikale „Appendix" [1]) įrodė, kad jo geometrijoj ratilo kvadratūra yra galima. Bet, kaip augščiau esam matę, Lindemann'as 1882 m. yr įrodęs ratilo kvadratūros negalimumą. Kaip tad tuodu prieštaraujančiu teigimu sutaikinti? Mūsų išmanymu, natūraliausiai atsiekiama tai šiuo keliu: ratilo kvadratūra yra negalima, pasigaunant vien liniuotės ir ratilo, bet ji galima, pasigaunant atatinkamų kreivųjų (pav. kvadratrisės). Jei tat Bolyai'is yr įrodęs ratilo kvadratūros galimumą, pasigaunant jo tiesiųjų ir ratilų, tai tenka tarti, kad jo

---

[1]) *Joannis Bolyai de Bolya* Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli. Lipsiae Teubneri MCMIII.

tiesios yra vien „neva tiesic
moje gi jos yra kreivosios, todėl ir ...
jų pasigaunant, ratilo kvadratūra virsta galima. Su tuo betgi nenori sutikti augščiau minėtasis d-ras Vörös'as. Taigi ir čia dar lieka gana vietos naujiems tyrinėjimams.[1]

---

[1]) Iš naujesniųjų veikalų, rašiusių apie tris garsiausiuosius geometrijos klausimus, pažymėtini dar šie

Fr. Enriques. Fragen der Elementargeometrie. II. Teil. Leipzig 1907. Čia tarp kitko pateikta matematiški įrodymai deliškio uždavinio ir kampo trisekcijos negalimumo elementariu būdu. Mes jų nedėjom dėl vietos trūkumo.

F. Gomes Texeira. Traité des courbes speciales remarquables. Tome III. Coimbre 1915, 283—412 p. Čia tarp kitko radom dar dvi įdomi formuli π dydžiui apskaityti, būtent:

$$\text{Clauseno } \frac{\pi}{4} = 22 \operatorname{arctg} \frac{1}{28} + \operatorname{arctg} \frac{1}{443} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{1393} - 10 \operatorname{arctg} \frac{1}{11018} \text{ ir}$$

$$\text{Bismano } \pi = 32 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - 16 \operatorname{arctg} \frac{2}{1030} - 4 \operatorname{arctg} \ldots$$

